PHYSIQUE

Mercier Dany-Jack

TC 2



Augustin Fresnel. (1788-1827.)

Cliché Hachette.

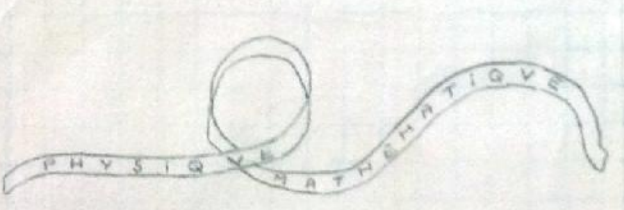
glatigny

150 pages

TC2

Cahier de Cours de Physique

n° 1





Année scolaire 74-75

Cours de M. Dolla (??)

TABLE DES MATIERES

1 Quelques préliminaires mathématiques

Rappels et compléments concernant la notion de fonction dérivée.

Définitions

Soit $y = f(x)$ une fonction de la variable x définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$. Soit $x_0 \in]a, b[$ et $(x_0 + h) \in]a, b[$.

On forme le rapport :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Si ce rapport tend vers une limite l quand h tend vers 0 (par valeurs négatives ou positives), le nombre l est appelé "dérivée" de la fonction $y = f(x)$ au point x_0.

On note cette dérivée y'_0 ou $f'(x_0)$.

Si la dérivée existe $\forall x_0 \in]a, b[$, alors on a défini une nouvelle fonction de la variable x appelée fonction dérivée. On la note y'_x ou $f'(x)$.

Exemple

Soit $y = \sin x$ définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$x_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0 + h) \in \mathbb{R}$.

$$R = \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$$

Comme $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$$R = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

Comme $\lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$, $\lim_{h \to 0} R = \cos x_0$

Dérivée d'une fonction composée.

On démontre, en mathématique (et nous admettrons) la proposition suivante : Si la fonction $u = f(x)$ définie et continue sur $[a, b]$ est dérivable sur $]a, b[$; et si la fonction $y = g(u) = g[f(x)]$ est dérivable sur $]f(a), f(b)[$, alors y est dérivable par rapport à x sur l'intervalle $]a, b[$. Et la fonction dérivée a pour expression :

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Exemples

* Soit la fonction $y = \sin(\underbrace{ax+b}_{u})$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$y = \sin u$; $y'_u = \cos u$; $u'_x = a$ donc $y'_x = a \cos(ax+b)$

* Soit la fonction $y = \sin^2 x = u^2$ avec $\sin x = u$

$y'_u = 2u$; $u'_x = \cos x$ donc $y'_x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$.

Notion de différentielle première

Soit une fonction $y = f(x)$ dérivable sur $]a, b[$ et $x \in]a, b[$, on appelle différentielle première de la fonction f, le produit de la dérivée $f'(x)$ par un accroissement arbitraire, noté dx, de la variable x.

On note la différentielle df ou dy

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

Exemple

Soit la fonction $y = f(x) = \cos^2 x$

$u = \cos x$

$y = u^2$ $\quad y'_u = 2u$ $\quad u'_x = -\sin x$ $\quad y'_x = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$

donc $dy = -\sin 2x \cdot dx$.

Remarque

La notion de différentielle nous fournit une autre notation pour la fonction dérivée.

$dy = f'(x).\,dx \quad \vdash \quad f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Cette notation est très utilisée en physique. On utilise fréquemment pour désigner la dérivée seconde la notation : $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

Notion de primitive d'une fonction donnée. Notion d'intégrale.

Définition

Soit une fonction $y = f(x)$ définie et continue sur $[a, b]$. La fonction $F(x)$ est dite une primitive de $f(x)$ si $F(x)$ admet sur $]a, b[$ $f(x)$ pour fonction dérivée.

$F'(x) = f(x)$

exemple : $F(x) = -\cos x$ est une primitive de la fonction $f(x) = \sin x$. En effet $F'(x) = \sin x = f(x)$

Ensemble des primitives d'une fonction donnée.

1°/ Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, la fonction $G(x) = F(x) + C$ où C désigne une constante arbitraire, est une autre primitive de $f(x)$. En effet :

$G'(x) = F'(x)$ car la dérivée d'une fonction constante est nulle.

2°/ Réciproquement, soit $G(x)$ et $F(x)$ deux primitives distinctes de la fonction $f(x)$. Donc
$G'(x) = f(x)$
$F'(x) = f(x)$
$G(x) \neq F(x)$

Soit la fonction $\Phi(x) = G(x) - F(x)$

on obtient : $\Phi'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$ et $\Phi'(x) = 0 \Rightarrow \Phi(x) = \text{Cte}$

d'où $G(x) = F(x) + \text{Cte}$.

Théorème : Si la fonction $f(x)$ admet une primitive $F(x)$, elle en admet une infinité qui diffèrent de $F(x)$ par addition d'une constante arbitraire.

Notion d'intégrale indéfinie.

L'ensemble des primitives d'une fonction $f(x)$ est désignée par le symbole $\int f(x).\,dx$

(lire "somme de $f(x).\,dx$")

$f(x).\,dx$ est appelé l'élément différentiel de l'intégrale (le symbole $\int f(x).\,dx$ désigne une intégrale indéfinie.)

Ci-dessous, un tableau de quelques intégrales.

	fonction	$\int f(x).\,dx$
	$y = a$	$\int a.\,dx = ax + C$
$n \in \mathbb{Q}$ et $n \neq -1$	$y = x^n$	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
	$y = \lambda x^n$	$\int \lambda x^n\,dx = \lambda.\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
	$y = \sin(ax+b)$	$\int \sin(ax+b)\,dx = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
	$y = \cos(ax+b)$	$\int \cos(ax+b)\,dx = \dfrac{\sin(ax+b)}{a} + C$

* exemple numérique.
Soit à calculer l'intégrale :

$\int \cos^2 x \, dx =$. On se ramène à un degré moindre.

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $\quad \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2} \cos 2x$

$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Primitive de la fonction $f(x)$ prenant au point x_0 la valeur 0

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$ (supposée connue). Soit $G(x)$ la primitive de $f(x)$ s'annulant au point x_0.

$\begin{cases} G(x) = F(x) + C \\ G(x_0) = 0 \end{cases}$ $\quad F(x_0) + C = 0 \Rightarrow C = -F(x_0)$
d'où $G(x) = F(x) - F(x_0)$

* exemple numérique

$\int \frac{1}{2} x^3 \, dx = \frac{1}{8} x^4 + C = F(x) + C$

La primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{2} x^3$ qui s'annule au point $x_0 = 3$ est :

$G(x) = F(x) - F(3)$
$= \frac{1}{8} x^4 - \frac{21}{8}$

Notion d'intégrale définie.

$F(x)$ étant une primitive de $f(x)$, la différence $F(x) - F(a)$ est appelée "intégrale définie" sur l'intervalle $[a, x]$ de la fonction $f(x)$. On désigne cette intégrale définie par le symbole : $\int_a^x f(x) \, dx$ (lire "somme de a à x de $f(x) dx$)

$$\boxed{\int_a^x f(x) \, dx = F(x) - F(a)}$$

On peut remarquer que cette intégrale définie n'est autre que la primitive qui s'annule pour la valeur a.
De même $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$

Étude d'un exemple d'application en physique de la notion d'intégrale.

Soit un ressort hélicoïdal élastique de raideur k. Ce ressort travaille soit à la dilatation, soit à la compression et la force "élastique" $\vec{f}$ est proportionnelle à l'allongement (resp. au raccourcissement) du ressort. La raideur k est le coefficient de proportionalité.
Nous orienterons l'axe $x'x$ du ressort et nous prendrons comme origine des abscisses sur cet axe la position O de l'extrémité libre du ressort au repos.
L'abscisse $\overline{OM} = x$ de cette extrémité exprimera algébriquement l'allongement (ou le raccourcissement) du ressort tendu (ou comprimé). Nous nous proposons d'évaluer le travail de $\vec{f}$ lors du passage de x de O à x_1 (x_1 donné).

ressort au repos
ressort tendu
" comprimé

$\vec{f} = -kx$

A partir de l'élongation x de l'extrémité du ressort, dilatons ou comprimons très légèrement ce ressort, l'élongation subissant une variation extrêmement petite dx.
On peut considérer qu'au cours de ce déplacement élémentaire infiniment petit dx la mesure algébrique de la force $\vec{f}$ est demeurée constante.
On peut alors exprimer le travail élémentaire (dW) de la force $\vec{f}$

$dW = -kx\,dx$

Le travail total lors du déplacement correspondant du passage de x de la valeur 0 à la valeur x_1, s'exprime par l'intégrale définie : $\int_0^{x_1} -kx\,dx = W_0^{x_1}$.

On calcul $F(x) = \int -kx\,.\,dx = -\frac{1}{2}kx^2 + C$

$$\int_0^{x_1} = F(x_1) - F(0) = -\frac{1}{2}kx_1^2$$

Solutions de l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ (I)

Dans cette équation, y désigne une fonction de x, $\frac{d^2y}{dx^2}$ sa dérivée seconde par rapport à x et ω une constante réelle.

Proposons nous de vérifier que la fonction $y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, ou $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ (II) est solution de l'équation (I)

Nous procéderons par 2 dérivations :

$\frac{dy}{dx} = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\omega^2\cos\omega x - B\omega^2\sin\omega x = -\omega^2(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$
$= -\omega^2 y$

On a vérifié que (II) est solution de (I).

On démontre en mathématique (et nous admettrons ce résultat) que II représente l'ensemble des solutions de (I), les constantes A et B prenant des valeurs arbitraires.

Remarque

(II) peut encore s'écrire : $y = r\cos(\omega x - \varphi)$ $\quad r \in \mathbb{R}_+$, φ = angle défini mod. 2π

$y = r\cos\varphi\cos\omega x + r\sin\varphi\,.\,\sin\omega x$ (III)

(II et III) $\Rightarrow$ $r\cos\varphi\cos\omega x + r\sin\varphi\sin\omega x = A\cos\omega x + B\sin\omega x$

vérifiée $\forall x$, soi : $\begin{cases} r\cos\varphi = A \\ r\sin\varphi = B \end{cases}$ $\quad r^2 = A^2 + B^2$ $\quad$ car $r \in \mathbb{R}_+$

$tg\,\varphi = \frac{B}{A}$ (3) $\quad \varphi$ déterminé par la relation (3) associé à l'une ou l'autre des équations (1) ou (2).

Nous rencontrerons une telle équation différentielle en physique et nous retiendrons que la solution d'une telle équation est une fonction sinusoïdale de la variable.

Notion de dérivation vectorielle

Définition

Soit le vecteur $\vec{V}$ dont les coordonnées rapportées au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (X, Y, Z) sont des fonctions numériques de la variable t.

$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

Nous supposerons les fonctions X, Y et Z dérivables au moins 2 fois par rapport à t.

On appelle dérivée première par rapport à t, du vecteur $\vec{V}$, le vecteur dont les coordonnées sont les dérivées par rapport à t des coordonnées du vecteur $\vec{V}$. On écrit

$\frac{d(\vec{V})}{dt} = X'_{(t)}\vec{i} + Y'_{(t)}\vec{j} + Z'_{(t)}\vec{k}$

ou $\frac{d(\vec{V})}{dt} = \frac{dX}{dt}\vec{i} + \frac{dY}{dt}\vec{j} + \frac{dZ}{dt}\vec{k}$ $\quad$ Les vecteurs $\vec{V}$ et $\frac{d\vec{V}}{dt}$ ont respectivement pour norme $\|\vec{V}\| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ et $\left\|\frac{d(\vec{V})}{dt}\right\| = \sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2}$

De même, on appellera dérivée seconde par rapport à t du vecteur $\vec{V}$ le vecteur :

$$\frac{d^2(\vec{V})}{dt^2} = X''_{(t)}\,\vec{i} + Y''_{(t)}\,\vec{j} + Z''_{(t)}\,\vec{k} \qquad \left\|\frac{d^2(\vec{V})}{dt^2}\right\| = \sqrt{X''^2 + Y''^2 + Z''^2}$$

Dérivée d'un vecteur constant.

$\vec{V}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ constant. $\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dZ}{dt} = 0$ donc $\dfrac{d(\vec{V})}{dt} = \vec{0}$

Dérivée du produit d'une fonction vectorielle de t par une constante réelle.

Soit $\vec{v} = \lambda \vec{V}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{v}\,(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$ $\qquad \dfrac{d\vec{v}}{dt} : \begin{pmatrix} \lambda X' \\ \lambda Y' \\ \lambda Z' \end{pmatrix}$ donc $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \lambda \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

Dérivée du produit d'une fonction vectorielle de t par une fonction numérique de t.

Soit $\vec{V}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\vec{U} = f(t).\vec{V}$ $\qquad \vec{U} : (f(t)\,X,\ f(t)\,Y,\ f(t).Z)$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} : \begin{pmatrix} f(t).\dfrac{dX}{dt} + f'(t)\,X \\ f(t)\,\dfrac{dY}{dt} + f'(t)\,Y \\ f(t)\,\dfrac{dZ}{dt} + f'(t)\,Z \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \frac{d\vec{U}}{dt} = f(t)\,\frac{d\vec{V}}{dt} + f'(t).\vec{V}$$

Dérivée d'un produit scalaire.

Il importe de préciser avant toute chose que la dérivée comme le produit scalaire lui-même sont des fonctions numériques de t.

Soient les vecteurs $\vec{V}_1\,(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{V}_2\,(X_2, Y_2, Z_2)$

Leur produit scalaire a pour expression :

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

$$\frac{d(\vec{V}_1.\vec{V}_2)}{dt} = X_1 \frac{dX_2}{dt} + \frac{dX_1}{dt} X_2 + Y_1 \frac{dY_2}{dt} + \frac{dY_1}{dt} Y_2 + \frac{dZ_1}{dt} Z_2 + Z_1 \frac{dZ_2}{dt}$$

$$= \left(X_1 \frac{dX_2}{dt} + Y_1 \frac{dY_2}{dt} + Z_1 \frac{dZ_2}{dt}\right) + \left(X_2 \frac{dX_1}{dt}\right.$$

$$\frac{d(\vec{V}_1.\vec{V}_2)}{dt} = \vec{V}_1 . \frac{d\vec{V}_2}{dt} + \vec{V}_2 . \frac{d\vec{V}_1}{dt}$$

Cas particulier : $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \vec{V}$ $\qquad \dfrac{d\vec{V}^2}{dt} = 2\left(\vec{V}.\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right)$

Dérivée (par rapport à son angle polaire) d'un vecteur unitaire.

Soient rapportés au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le vecteur unitaire $\vec{R}$ d'angle polaire $(\vec{i}, \vec{R}) = \theta$

$\|\vec{R}\| = 1$

$\vec{R} = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$

La dérivée par rapport à θ du vecteur unitaire $\vec{R}$ est :

$$\frac{d\vec{R}}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\vec{j}$$

Le vecteur $\dfrac{d(\vec{R})}{d\theta}$ a une norme égale à 1

et d'angle polaire $\theta + \dfrac{\pi}{2}$.

La dérivée par rapport à son angle polaire θ, d'un vecteur unitaire est le vecteur unitaire d'angle polaire $\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)$

 Cf Encyclopédie Larousse p 302

Cinématique du point matériel

Nous appelerons "point matériel" un corps de dimensions suffisamment petites pour être assimilable au point géométrique.
Le mouvement est le mode d'existence de la matière et présente un caractère relatif. Des notions telles que celles de trajectoire d'un point matériel (ensemble des positions successives de ce point) sont des notions relatives en ce sens qu'elles ne peuvent s'entendre que rapportées à un certain repère.
Ex : Un observateur placé dans un train en mvt rectiligne uniforme et observant la chute d'une bille affirme : la trajectoire de la bille est rectiligne et verticale. Pour un observateur lié à la voie ferrée, cette trajectoire serait parabolique.
Relatives également sont les autres caractéristique cinématique ($\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$).
Il importe donc de préciser le repère auquel est rapporté le mvt étudié.
Il est commode de figurer ce repère par un trièdre orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Rapportée à ce repère, la trajectoire est une courbe $(\mathscr{C})$ et la position du mobile M à la date t peut être définie par le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,
(x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes du mobile à la date t

$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

On peut convenir également d'orienter la courbe trajectoire ce qui implique :
- le choix d'un sens positif
- le choix d'une origine Ω (oméga)

La mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{\Omega M}$ que nous formulerons $\text{arc}\ \Omega M = s$ est appelée "abscisse curviligne à la date t".

Si la trajectoire est plane, on la rapporte à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé dont le plan est celui de la trajectoire.
On pose $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$
$\|\overrightarrow{OM}\| = r$
L'axe support de $\overrightarrow{OM}$ est orienté par le vecteur unitaire $\vec{R}$
r et θ sont appelées coordonnées polaires du mobile

$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{R}$

Vecteur vitesse

1°/ Vecteur vitesse moyenne entre les dates t et t + Δt
Soit M et M' les positions du mobile aux dates t et t + Δt
On oriente la sécante MM', le sens + de celle-ci étant accordé à celui adopté sur la courbe $(\mathscr{C})$
$\vec{u}$: vecteur unitaire de $\mathscr{D}_{MM'}$.

$\overrightarrow{MM'} = \overline{MM'} \cdot \vec{u}$

On appelle vitesse moyenne du mobile entre les dates t et $t+\Delta t$ le vecteur $\frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \vec{V}_m$

2°/ Vecteur vitesse instantanée.

On appelle vecteur vitesse à la date t, le vecteur dérivée par rapport à t du vecteur $\overrightarrow{OM}$. On le note

$$\vec{V} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$$

Ses coordonnées sont les dérivées des coordonnées du mobile.

$$v_x = \frac{dx}{dt} \; ; \; v_y = \frac{dy}{dt} \; ; \; v_z = \frac{dz}{dt}$$

3°/ Relation entre le vecteur vitesse instantanée, et le vecteur vitesse moyenne.

Désignons par $\begin{pmatrix} x+\Delta x \\ y+\Delta y \\ z+\Delta z \end{pmatrix}$ les coordonnées du mobile à la date $(t+\Delta t)$.

Les coordonnées du vecteur vitesse moyenne sont : $\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$

Quand Δt tend vers 0, ces rapport ont respectivement pour limite les dérivées par rapport à t des coordonnées (x, y, z).

En conclusion :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m$$

Or, ce vecteur vitesse moyenne peut s'écrire $\vec{V}_m = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} \cdot \vec{u}$

Soit encore, en introduisant dans le second membre $\text{arc}\, \widehat{MM'}$

$$\vec{V}_m = \frac{\overline{MM'}}{\text{arc}\, \widehat{MM'}} \cdot \frac{\text{arc}\, \widehat{MM'}}{\Delta t} \cdot \vec{u}$$

Quand $\Delta t \to 0$, la sécante (MM') tend vers une position limite : la tangente en M. Celle-ci sera orientée par le vecteur $\vec{T}_s = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{u}$

Nous poserons : $\text{arc}\, \widehat{MM'} = \text{arc}\, \Omega M' - \text{arc}\, \Omega M$
$= \Delta s$

Quand $\Delta t \to 0$, le rapport $\frac{\text{arc}\, \widehat{MM'}}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ tend vers une limite qui n'est autre que la dérivée par rapport à t de l'abscisse curviligne s.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{arc}\, \widehat{MM'}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Nous admettons (ce qui sera établit dans le cours de mathématique) que :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\text{arc}\, \widehat{MM'}} = +1$$

En conclusion, $\lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T}$, le vecteur vitesse instantanée du mobile est colinéaire à la tangente à la trajectoire au point M. Il a pour mesure algébrique sur la tangente orientée la dérivée par rapport à t de l'abscisse curviligne s.

Vecteur accélération

1°/ Accélération moyenne entre les dates t et $t+\Delta t$ (cf figure →)

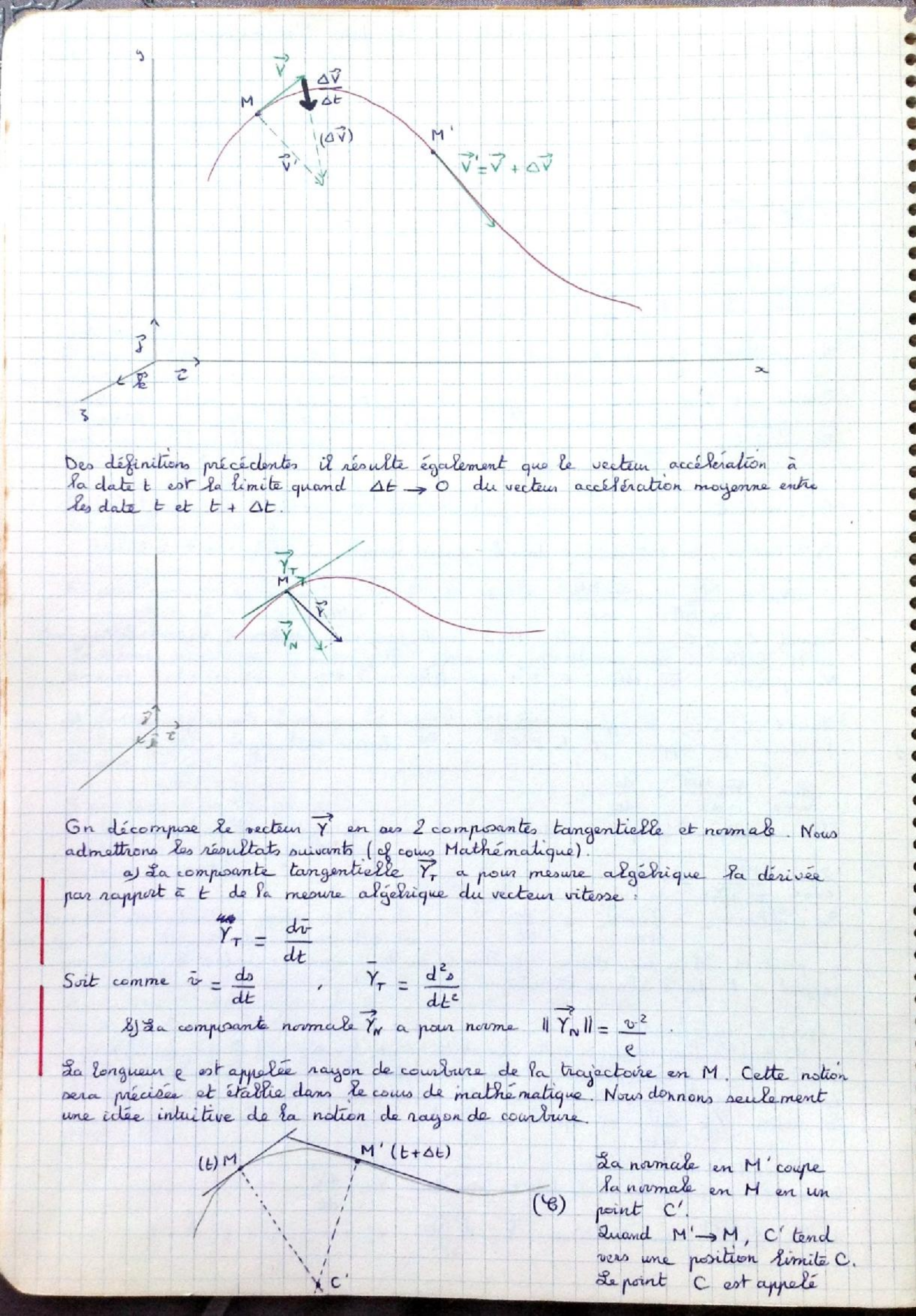
$\vec{V}$ et $\vec{V}'$ désignant les vecteurs vitesses aux dates t et $t+\Delta t$, le vecteur $\Delta\vec{V} = \vec{V}' - \vec{V}$ est l'accroissement du vecteur vitesse entre ces 2 dates.

Le vecteur $\vec{\gamma}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$ est appelé accélération moyenne entre les date t et Δt.

Accélération à l'instant t.

On appelle accélération à la date t le vecteur $\gamma = \frac{d\vec{V}}{dt}$.

de $\vec{V} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$ nous déduisons : $\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = x''_t \vec{i} + y''_t \vec{j} + z''_t \vec{k}$



Des définitions précédentes il résulte également que le vecteur accélération à la date t est la limite quand $\Delta t \to 0$ du vecteur accélération moyenne entre les date t et $t + \Delta t$.

On décompose le vecteur $\vec\gamma$ en ses 2 composantes tangentielle et normale. Nous admettrons les résultats suivants (cf cours Mathématique).

a) La composante tangentielle $\vec\gamma_T$ a pour mesure algébrique la dérivée par rapport à t de la mesure algébrique du vecteur vitesse :

$$\bar\gamma_T = \frac{d\bar v}{dt}$$

Soit comme $\bar v = \frac{ds}{dt}$, $\bar\gamma_T = \frac{d^2 s}{dt^2}$

b) La composante normale $\vec\gamma_N$ a pour norme $\|\vec\gamma_N\| = \frac{v^2}{\rho}$.

La longueur ρ est appelée rayon de courbure de la trajectoire en M. Cette notion sera précisée et établie dans le cours de mathématique. Nous donnons seulement une idée intuitive de la notion de rayon de courbure.

La normale en M' coupe la normale en M en un point C'.
Quand $M' \to M$, C' tend vers une position limite C.
Le point C est appelé

centre de courbure en M. La longueur CM = ρ est le "rayon de courbure" en M.
(dans le cas d'une trajectoire circulaire, ρ = rayon du cercle).

Mouvement curviligne accéléré, décéléré, uniforme.

Nous dirons qu'un mouvement est accéléré si $\|\vec{V}\|$ croît.
" " décéléré si " décroît.
" " uniforme, si " constant.

Or, $\vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2$.

La fonction $\|\vec{V}\|$ varie dans le même sens que $\vec{V}^2$. On est donc ramenés à étudier le sens de variation de la fonction $\vec{V}^2$.

$$\frac{d\vec{V}^2}{dt} = 2\vec{V}\,\frac{d\vec{V}}{dt} = 2\vec{V}\cdot\vec{\gamma}$$

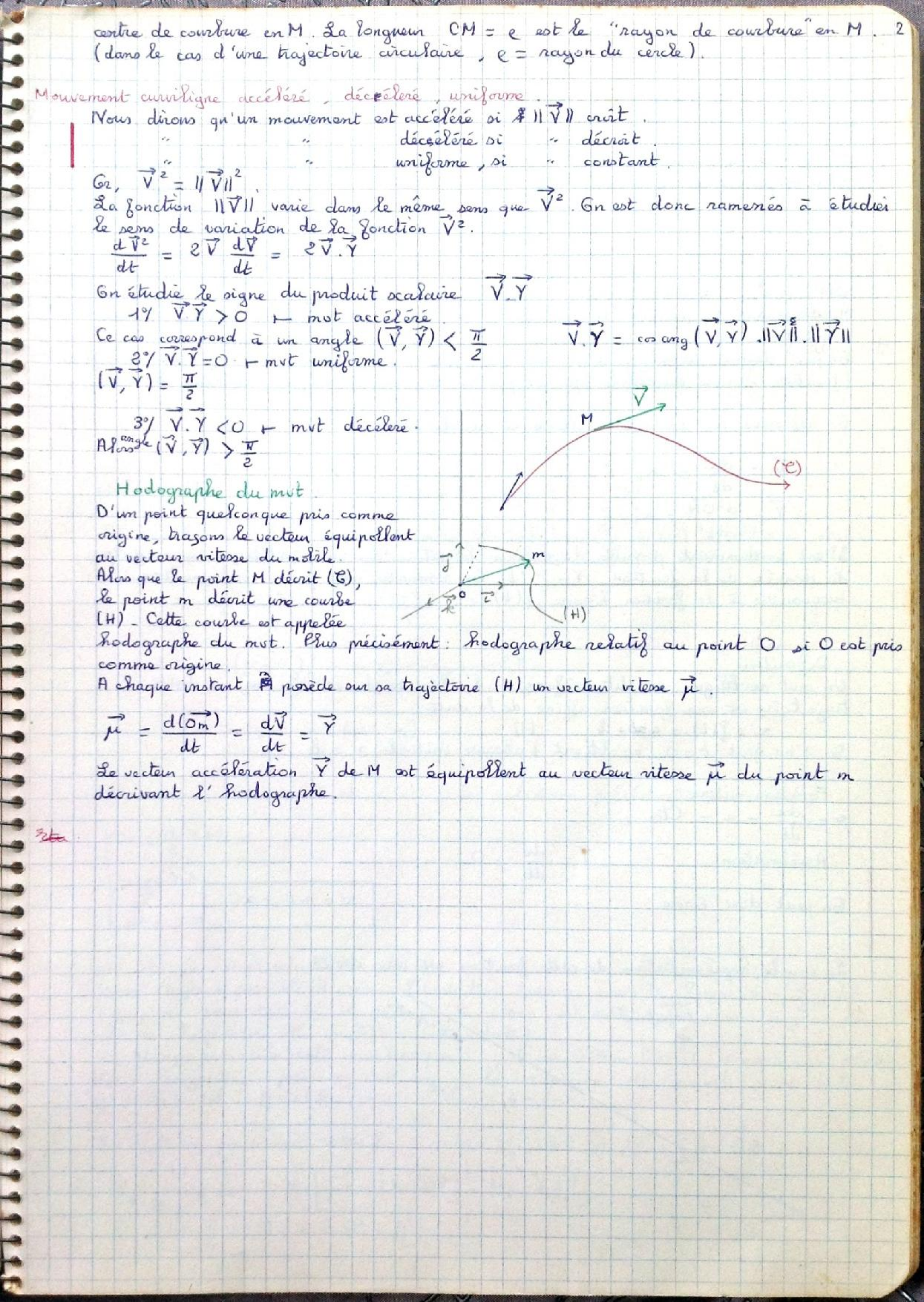
On étudie le signe du produit scalaire $\vec{V}\cdot\vec{\gamma}$

1°/ $\vec{V}\cdot\vec{\gamma} > 0$ ⊢ mvt accéléré.

Ce cas correspond à un angle $(\vec{V},\vec{\gamma}) < \frac{\pi}{2}$ $\qquad \vec{V}\cdot\vec{\gamma} = \cos \text{ang}(\vec{V},\vec{\gamma})\,.\|\vec{V}\|\,.\|\vec{\gamma}\|$

2°/ $\vec{V}\cdot\vec{\gamma} = 0$ ⊢ mvt uniforme.
$(\vec{V},\vec{\gamma}) = \frac{\pi}{2}$

3°/ $\vec{V}\cdot\vec{\gamma} < 0$ ⊢ mvt décéléré.
Alors angle $(\vec{V},\vec{\gamma}) > \frac{\pi}{2}$



Hodographe du mvt

D'un point quelconque pris comme origine, traçons le vecteur équipollent au vecteur vitesse du mobile.
Alors que le point M décrit (C), le point m décrit une courbe (H). Cette courbe est appelée hodographe du mvt. Plus précisément : hodographe relatif au point O si O est pris comme origine.

A chaque instant m possède sur sa trajectoire (H) un vecteur vitesse $\vec{\mu}$.

$$\vec{\mu} = \frac{d(\vec{Om})}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\gamma}$$

Le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ de M est équipollent au vecteur vitesse $\vec{\mu}$ du point m décrivant l'hodographe.

Étude de quelques mouvements rectilignes

Un mvt est dit rectiligne si la trajectoire du mobile est une droite. On oriente cette trajectoire par le choix d'une origine O et d'un vecteur unitaire $\vec{i}$.

x — O $\vec{i}$ — M — x'

$\vec{OM} = x\vec{i}$ x : abscisse du mobile à la date t.
M_0 désignant la position du mobile à la date $t = 0$, $\overline{M_0M}$ est appelée "abscisse initiale".
On peut définir la nature d'un mvt rectiligne par la donnée de la fonction $x = f(t)$.
(fonction horaire du mobile appelée parfois, par abus de langage, équation horaire).

On retrouve ici les vecteurs vitesse et accélération :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = x'_t \cdot \vec{i}$$
$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = x''_t \cdot \vec{i}$$

Il est évidemment possible de définir la nature du mvt rectiligne envisagé par la donnée de la fonction $\gamma = f''(t)$. On remonte alors par 2 intégrations successives à la fonction horaire $f(t)$

Mouvement rectiligne uniforme

Définition

Un mvt rectiligne est dit uniforme si l'abscisse du mobile sur sa droite trajectoire est une fonction affine de la date.

$$x = f(t) = at + b \qquad (1)$$

Si l'on fait $t = 0$, on obtient l'abscisse initiale $x_0 = b$.

Fonction vitesse

$$v = \frac{dx}{dt} = a = Cte$$

Accélération

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = 0$$

On peut donc écrire : $\boxed{x = vt + x_0}$

La courbe représentative de cette fonction est une droite.

Mouvement rectiligne uniformément varié.

Définition

Un mvt rectiligne est dit uniformément varié si l'abscisse de M sur sa droite trajectoire est une fonction du second degré de la date.

$$x = f(t) = at^2 + bt + c \qquad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

Si $t = 0$, $x_0 = c$: abscisse initiale.

Fonction vitesse

$v = \frac{dx}{dt} = 2at + b$ fonction affine de t.

Si dans (2) on fait $t = 0$, on obtient l'expression de la vitesse initiale : $v_0 = b$

Accélération

$\gamma = \frac{dv}{dt} = 2a$ ⊢ $a = \frac{1}{2}\gamma$ l'accélération est constante.

Si l'on introduit les constantes avec leur signification physique :

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0} \qquad (3)$$

et la fonction horaire de v : $v = \gamma t + v_0$ (4)

Si on élimine le paramètre t entre les relations (3) et (4) on obtient une relation indépendante de t entre l'abscisse à la date t et la vitesse à la date t.

$$x = \frac{1}{2}\gamma \frac{(v - v_0)^2}{\gamma^2} + v_0 \frac{(v - v_0)}{\gamma} + x_0$$

$$2\gamma x = (v - v_0)^2 + 2v_0(v - v_0) + 2\gamma x_0$$

$$2\gamma x = (v - v_0)(v + v_0) + 2\gamma x_0$$

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2\gamma(x - x_0)}$$

Remarque : Si $v_0 = 0$ et $x_0 = 0$, les relations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\gamma t^2 \\ v = \gamma t \\ v^2 = 2\gamma x \end{cases}$$

Une propriété importante du mvt rectiligne uniformément varié.

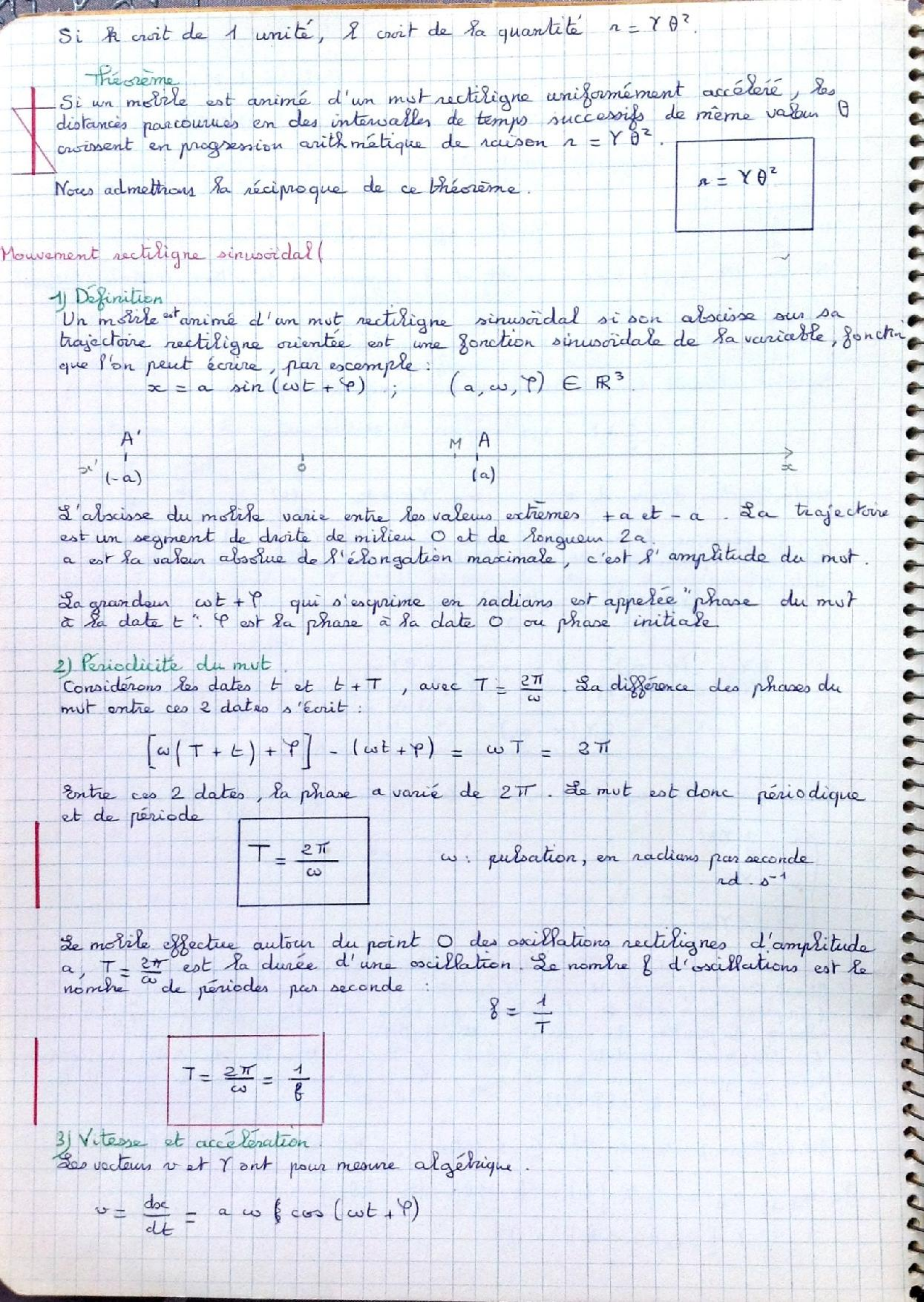
Il est toujours possible d'écrire l'équation horaire sous la forme $x = \frac{1}{2}\gamma t^2$.
(On prend pour date 0, la date où la vitesse est nulle, et comme origine des abscisses, la position du mobile à cette date).

t_0 désignant une date quelconque, θ un intervalle de temps constant. Nous désignerons par x_k et x_{k+1} les abscisses du mobile aux dates $t_0 + k\theta$ et $t_0 + (k+1)\theta$ $\theta \geqslant 0$.

La distance parcourue entre les 2 dates $t_0 + k\theta$ et $t_0 + (k+1)\theta$

$$l = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2}\gamma \left[[t_0 + (k+1)\theta]^2 - (t_0 + k\theta)^2 \right]$$

$$l = \frac{1}{2}\gamma \left[2t_0\theta + 2k\theta^2 + \theta^2 \right]$$



Si k croît de 1 unité, ℓ croît de la quantité $r = \gamma \theta^2$.

Théorème

Si un mobile est animé d'un mvt rectiligne uniformément accéléré, les distances parcourues en des intervalles de temps successifs de même valeur θ croissent en progression arithmétique de raison $r = \gamma \theta^2$.

$$r = \gamma \theta^2$$

Nous admettrons la réciproque de ce théorème.

Mouvement rectiligne sinusoïdal

1) Définition

Un mobile est animé d'un mvt rectiligne sinusoïdal si son abscisse sur sa trajectoire rectiligne orientée est une fonction sinusoïdale de la variable, fonction que l'on peut écrire, par exemple :

$$x = a \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad (a, \omega, \varphi) \in \mathbb{R}^3$$

L'abscisse du mobile varie entre les valeurs extrêmes $+a$ et $-a$. La trajectoire est un segment de droite de milieu O et de longueur $2a$.
a est la valeur absolue de l'élongation maximale, c'est l'amplitude du mvt.

La grandeur $\omega t + \varphi$ qui s'exprime en radians est appelée "phase du mvt à la date t". φ est la phase à la date 0 ou phase initiale.

2) Périodicité du mvt

Considérons les dates t et $t + T$, avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$. La différence des phases du mvt entre ces 2 dates s'écrit :

$$[\omega(T + t) + \varphi] - (\omega t + \varphi) = \omega T = 2\pi$$

Entre ces 2 dates, la phase a varié de 2π. Le mvt est donc périodique et de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ω : pulsation, en radians par seconde
rd . s^{-1}

Le mobile effectue autour du point O des oscillations rectilignes d'amplitude a, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la durée d'une oscillation. Le nombre f d'oscillations est le nombre de périodes par seconde :

$$f = \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

3) Vitesse et accélération

Les vecteurs v et γ ont pour mesure algébrique.

$$v = \frac{dx}{dt} = a \omega f \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Comme l'abscisse x, v et γ sont des fonctions sinusoïdales de la date de période $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

On peut écrire $v = a\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t + \varphi\right)$

Nous dirons que v est en avance de phas de $\frac{\pi}{2}$ sur x. (on dit encore en quadrature avance).

On peut écrire $\boxed{\gamma = -\omega^2 x}$

Théorème

Si un mobile est animé d'un mvt rect. sinusoïdal, son accélération est à chaque instant proportionnel à son élongation et de signe opposé.

$$\gamma = -\omega^2 x \quad \text{ou} \quad \gamma = -k x \quad k > 0$$

Réciproque.

Soit un mobile animé d'un mvt rectiligne tel que son accélération γ soit liée à son élongation x par la relation : $\gamma = -kx$ $(k \in \mathbb{R}_+)$

Cette relation peut s'écrire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Cette équation est une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants et à second membre nul.

Nous l'avons étudié en mathématique. Sa solution est une fonction sinusoïdale de la variable qui est ici la date.

Théorème récapitulatif.

— Si un mobile est animé d'un mvt rectiligne pour lequel l'accélération est à chaque instant proportionnelle à l'élongation et de signe contraire ($\gamma = -kx$), ce mobile est en mvt rectiligne sinusoïdal.

La pulsation ω est donnée par la relation $\omega^2 = k$.

4) Relation entre x et v.

Proposons nous d'établir une relation indépendante de t entre l'abscisse x et la vitesse.

$$\begin{cases} x = a\sin(\omega t + \varphi) & (1) \\ v = a\omega\cos(\omega t + \varphi) & (2) \end{cases}$$

d'où, en élevant au carré et en additionnant $\omega^2 x^2 + v^2 = a^2\omega^2$

Généralités

La trajectoire du mobile est un cercle. On rapporte le mvt au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'origine O est le centre du cercle trajectoire et dont les axes Ox et Oy appartiennent au plan du cercle trajectoire.

$A = (C) \cap Ox$

$\overset{\frown}{AM} = s$: abscisse curviligne du mobile à la date t.

$\text{mes}\,\widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})} = \theta$ angle polaire à la date t.

L'axe support de $\vec{OM}$ est orientée par le vecteur unitaire $\vec{R}$. Si r désigne le rayon du cercle (C), il vient $\vec{OM} = r.\vec{R}$

L'abscisse curviligne s et l'angle polaire θ sont liés par la relation : $s = r.\theta$ (θ en rd). Si à la date 0, le mobile est en M_0 : angle $(\vec{OA}, \vec{OM_0}) = \theta_0$, et $\overset{\frown}{AM_0} = s_0$ désignent l'angle polaire à la date 0, et l'abscisse curviligne à la date 0.

Vecteur vitesse

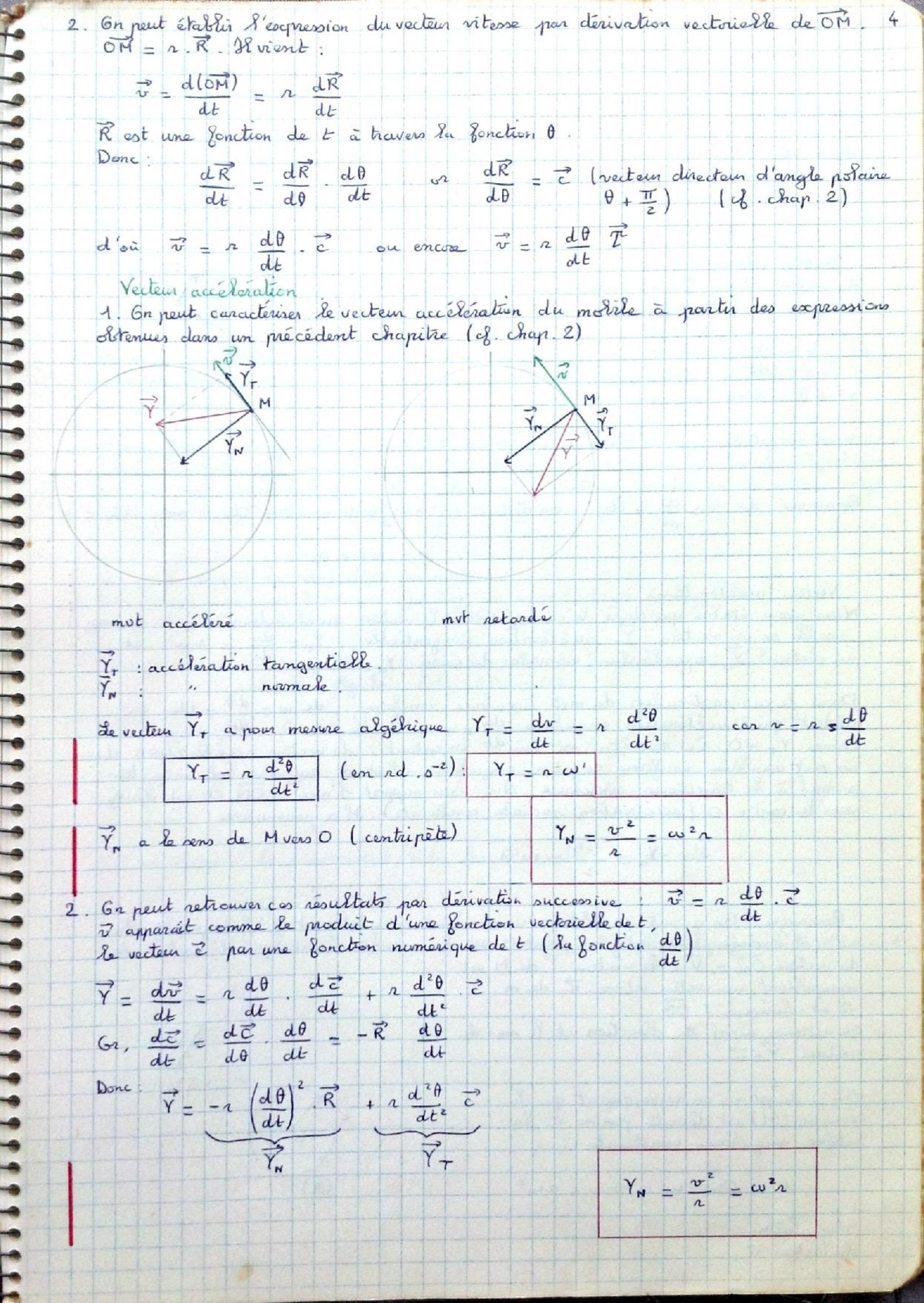
1. $\vec{v} = \dfrac{d(\vec{OM})}{dt}$

On peut caractériser ce vecteur $\vec{v}$ en utilisant les propriétés établies dans un chapitre précédent (cf. chap 2). Le vecteur $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire et sa mesure algébrique sur la tangente orientée est égale à la dérivée par rapport à t de l'abscisse curviligne :

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{ou :} \quad \boxed{v = r\,\frac{d\theta}{dt}} \quad (\text{en rd.s}^{-1})$$

Quelle est la signification physique de $\dfrac{d\theta}{dt}$? Soit θ et $\theta + \Delta\theta$ les valeurs de l'angle polaire aux dates t et $t + \Delta t$. La variation moyenne de l'angle polaire entre ces 2 dates est $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Ce rapport a pour limite, quand $\Delta t \to 0$ la dérivée $\dfrac{d\theta}{dt}$. $\dfrac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire instantanée (ou vitesse angulaire à la date t). On la désigne par la la lettre ω

$$\boxed{v = r\,\omega}$$



2. On peut établir l'expression du vecteur vitesse par dérivation vectorielle de $\vec{OM}$.
$\vec{OM} = r.\vec{R}$. Il vient :

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{OM})}{dt} = r\,\frac{d\vec{R}}{dt}$$

$\vec{R}$ est une fonction de t à travers la fonction θ.

Donc :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$ or $\frac{d\vec{R}}{d\theta} = \vec{c}$ (vecteur directeur d'angle polaire $\theta + \frac{\pi}{2}$) (cf. chap. 2)

d'où $\vec{v} = r\,\frac{d\theta}{dt}.\vec{c}$ ou encore $\vec{v} = r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{T}$

Vecteur accélération

1. On peut caractériser le vecteur accélération du mobile à partir des expressions obtenues dans un précédent chapitre (cf. chap. 2)

$\vec{\gamma}_T$: accélération tangentielle
$\vec{\gamma}_N$: " normale.

Le vecteur $\vec{\gamma}_T$ a pour mesure algébrique $\gamma_T = \frac{dv}{dt} = r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$ car $v = r.\frac{d\theta}{dt}$

$$\gamma_T = r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$ (en $rd.s^{-2}$) : $\gamma_T = r\,\omega'$

$\vec{\gamma}_N$ a le sens de M vers O (centripète)

$$\gamma_N = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

2. On peut retrouver ces résultats par dérivation successive : $\vec{v} = r\,\frac{d\theta}{dt}.\vec{c}$
$\vec{v}$ apparaît comme le produit d'une fonction vectorielle de t, le vecteur $\vec{c}$ par une fonction numérique de t (la fonction $\frac{d\theta}{dt}$)

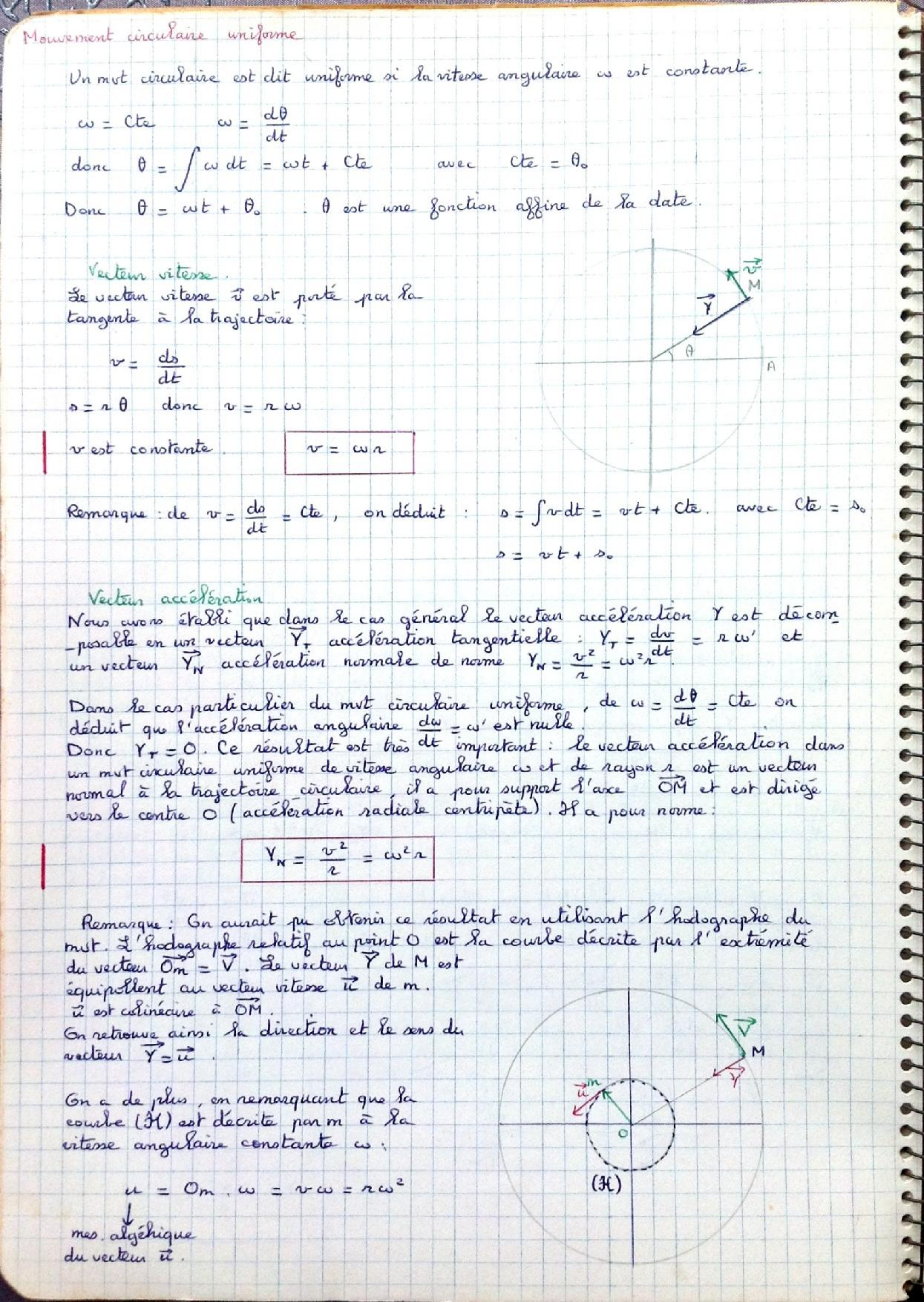
$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt}.\frac{d\vec{c}}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\vec{c}$$

Or, $\frac{d\vec{c}}{dt} = \frac{d\vec{c}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\vec{R}\,\frac{d\theta}{dt}$

Donc :

$$\vec{\gamma} = \underbrace{-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.\vec{R}}_{\vec{\gamma}_N} + \underbrace{r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\vec{c}}_{\vec{\gamma}_T}$$

$$\gamma_N = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$



Mouvement circulaire uniforme

Un mvt circulaire est dit uniforme si la vitesse angulaire ω est constante.

$\omega = Cte \qquad \omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

donc $\theta = \int \omega\, dt = \omega t + Cte$ avec $Cte = \theta_0$

Donc $\theta = \omega t + \theta_0$. θ est une fonction affine de la date.

Vecteur vitesse.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est porté par la tangente à la trajectoire :

$v = \dfrac{ds}{dt}$

$s = r\theta$ donc $v = r\omega$

v est constante. $\boxed{v = \omega r}$

Remarque : de $v = \dfrac{ds}{dt} = Cte$, on déduit : $s = \int v\, dt = vt + Cte$. avec $Cte = s_0$

$s = vt + s_0$

Vecteur accélération

Nous avons établi que dans le cas général le vecteur accélération γ est décomposable en un vecteur $\vec{\gamma}_T$ accélération tangentielle : $\gamma_T = \dfrac{dv}{dt} = r\omega'$ et un vecteur $\vec{\gamma}_N$ accélération normale de norme $\gamma_N = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r$.

Dans le cas particulier du mvt circulaire uniforme, de $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = Cte$ on déduit que l'accélération angulaire $\dfrac{d\omega}{dt} = \omega'$ est nulle.
Donc $\gamma_T = 0$. Ce résultat est très important : le vecteur accélération dans un mvt circulaire uniforme de vitesse angulaire ω et de rayon r est un vecteur normal à la trajectoire circulaire, il a pour support l'axe $\vec{OM}$ et est dirigé vers le centre O (accélération radiale centripète). Il a pour norme :

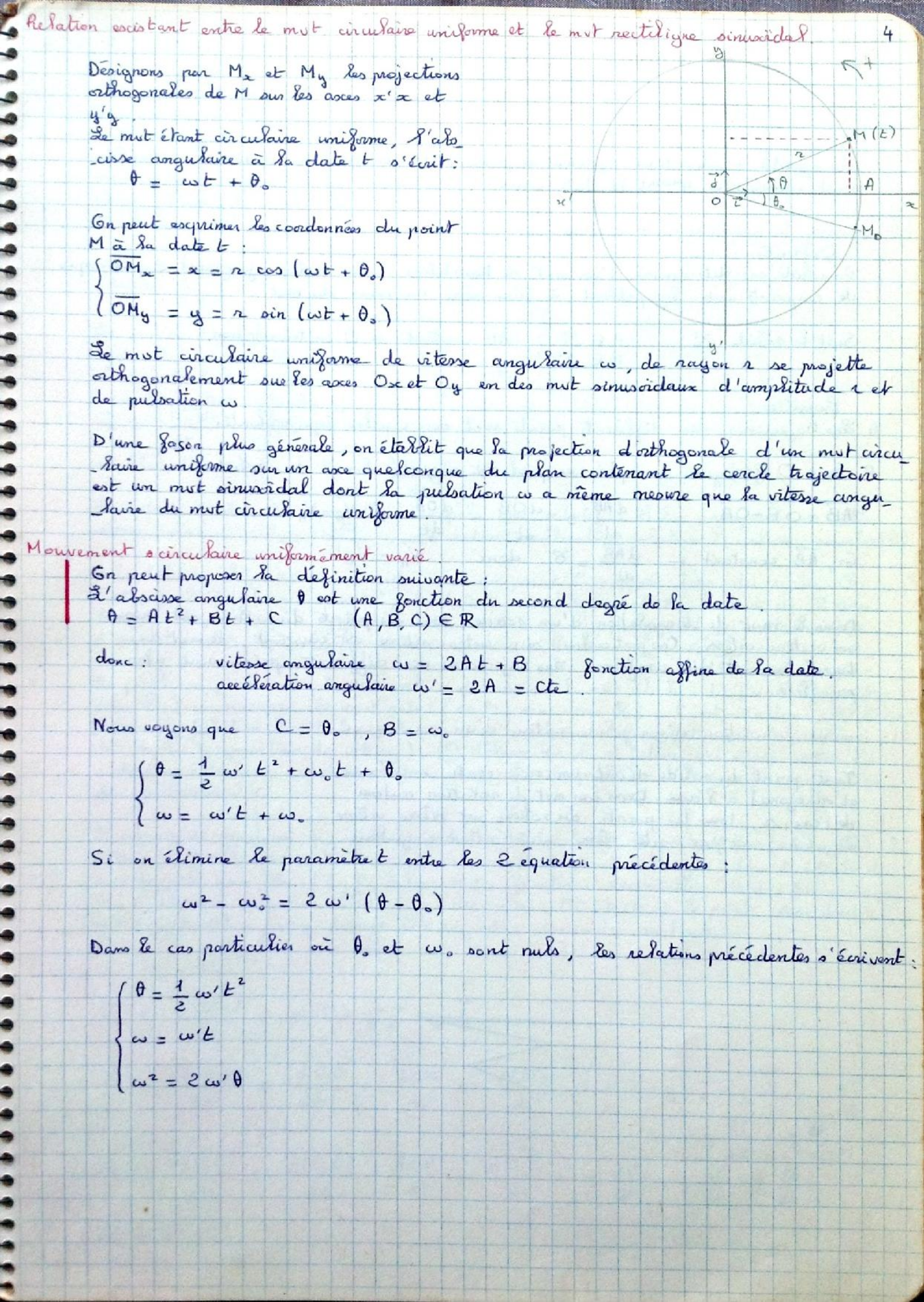
$$\boxed{\gamma_N = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

Remarque : On aurait pu obtenir ce résultat en utilisant l'hodographe du mvt. L'hodographe relatif au point O est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\vec{Om} = \vec{V}$. Le vecteur $\vec{\gamma}$ de M est équipollent au vecteur vitesse $\vec{u}$ de m.
$\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{OM}$.
On retrouve ainsi la direction et le sens du vecteur $\vec{\gamma} = \vec{u}$.

On a de plus, en remarquant que la courbe (H) est décrite par m à la vitesse angulaire constante ω :

$u = Om \cdot \omega = v\omega = r\omega^2$

u ↓ mes. algébrique du vecteur $\vec{u}$.



Relation existant entre le mvt circulaire uniforme et le mvt rectiligne sinusoïdal.

Désignons par M_x et M_y les projections orthogonales de M sur les axes $x'x$ et $y'y$.

Le mvt étant circulaire uniforme, l'abscisse angulaire à la date t s'écrit :

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

On peut exprimer les coordonnées du point M à la date t :

$$\begin{cases} \overline{OM_x} = x = r \cos(\omega t + \theta_0) \\ \overline{OM_y} = y = r \sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

Le mvt circulaire uniforme de vitesse angulaire ω, de rayon r se projette orthogonalement sur les axes Ox et Oy en des mvt sinusoïdaux d'amplitude r et de pulsation ω.

D'une façon plus générale, on établit que la projection d'orthogonale d'un mvt circulaire uniforme sur un axe quelconque du plan contenant le cercle trajectoire est un mvt sinusoïdal dont la pulsation ω a même mesure que la vitesse angulaire du mvt circulaire uniforme.

Mouvement circulaire uniformément varié

On peut proposer la définition suivante :
L'abscisse angulaire θ est une fonction du second degré de la date.

$$\theta = At^2 + Bt + C \qquad (A, B, C) \in \mathbb{R}$$

donc :
vitesse angulaire $\omega = 2At + B$ fonction affine de la date.
accélération angulaire $\omega' = 2A = C^{te}$.

Nous voyons que $C = \theta_0$, $B = \omega_0$

$$\begin{cases} \theta = \frac{1}{2}\omega' t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega = \omega' t + \omega_0 \end{cases}$$

Si on élimine le paramètre t entre les 2 équation précédentes :

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\omega'(\theta - \theta_0)$$

Dans le cas particulier où θ_0 et ω_0 sont nuls, les relations précédentes s'écrivent :

$$\begin{cases} \theta = \frac{1}{2}\omega' t^2 \\ \omega = \omega' t \\ \omega^2 = 2\omega'\theta \end{cases}$$

Quelques généralités sur la cinématique d'un solide.

On appelle solide tout système de points matériels dont les distances mutuelles sont invariantes quand la date varie.

Mouvement de translation d'un solide

Définition

Un solide est dit animé d'un mvt de translation si le vecteur joignant 2 quelconques de ces points reste équipollent à lui même au cours du mvt.

Soit le solide Σ $\left.\begin{matrix} A \in \Sigma \\ B \in \Sigma \end{matrix}\right\}$ $\vec{AB}$ constant si Σ en translation.

Propriétés

A. Les trajectoires des différents points sont des courbes équipollentes.

B. Soit O l'origine du repère auquel est rapporté le mvt du solide.

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ $\quad \dfrac{d\vec{AB}}{dt} = \dfrac{d\vec{OB}}{dt} - \dfrac{d\vec{OA}}{dt} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

Or, $\vec{AB}$ constant $\vdash$ $\dfrac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{0}$ donc $\vec{V}_A = \vec{V}_B$

Dans le mvt de translation d'un solide, tous les points du solide ont même vit vecteur vitesse. Cas particulier : si ce vecteur vitesse est constant, le mvt de translation est dit uniforme. Les trajectoires des différents points sont alors parallèles.

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

Tout point du solide décrit un cercle centré sur l'axe et orthogonal à l'axe. Dans leur mvt de rotation autour de l'axe Δ, tous les points du solide ont même vitesse angulaire, et par suite même accélération angulaire.

(Δ)

O

Soit un repère $\mathcal{R}_1$ (trièdre $O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$).
Soit un repère $\mathcal{R}$ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en mvt par rapport au repère $\mathcal{R}_1$.

On considère un point M de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$, x, y et z étant des fonctions de t.

$$\underset{(\text{date } t)}{\vec{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le mvt de M rapporté au repère $\mathcal{R}_1$ est appelé mvt "absolu". Il lui correspond un vecteur vitesse absolue $\vec{v}_a = \frac{d(\vec{O_1M})}{dt}$, un vecteur accélération absolu $\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\vec{O_1M}}{dt^2}$ et une courbe trajectoire $(\mathcal{C}_1)$.

Le mvt de M dans le repère $\mathcal{R}$ est appelé mvt relatif. Il lui correspond un vecteur vitesse relative $\vec{v}_r = \frac{d\vec{OM}}{dt}$, un vecteur accélération relative $\vec{\gamma}_r$ et une courbe $(\mathcal{C})$.

A la date t, le point M coïncide avec un point P supposé fixe du repère $\mathcal{R}$. P est appelé "point coïncidant" à la date t avec le point M. Le mvt de P dans le repère $\mathcal{R}_1$ est appelé mvt d'entrainement : il lui correspond un vecteur vitesse d'entraînement $\vec{v}_e = \frac{d\vec{O_1P}}{dt}$ et un vecteur accélération $\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\vec{O_1P}}{dt^2}$.

Le problème posé est le suivant : déterminer le mvt "absolu" du point M (mvt dans $\mathcal{R}_1$) connaissant le mvt "relatif" de M (mvt dans $\mathcal{R}$). C'est-à-dire, ⓐ déterminer la relation liant les vecteurs vitesse ci-dessus définis (et c'est le problème dit de la composition des vitesses), ⓑ déterminer la relation qui existe entre les vecteurs accélérations ci-dessus définis (et c'est le problème dit de la composition des accélérations).

capital: Il importe de remarquer que dans l'étude du mvt relatif du point M (mvt dans $\mathcal{R}$), les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ doivent être regardés comme constant alors que dans l'étude du mvt rapporté dans $\mathcal{R}_1$ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont des fonctions vectorielles de t. On remarquera également que dans l'expression du vecteur $\vec{OP}$ (P étant le point coïncident avec M à la date t) x y et z doivent être regardées comme des constantes

Composition des vitesses

$$\vec{v}_r = \frac{d(\vec{OM})}{dt} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$\vec{v}_a = \frac{d(\vec{O_1M})}{dt} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} + \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} + x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{v}_e = \frac{d(\vec{O_1P})}{dt} = \frac{d(\vec{O_1O})}{dt} + \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e}$$

Composition des accélération

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}.$$

Nous étudierons le problème de la composition des accélérations seulement dans le cas particulier où le mvt d'entraînement est un mvt de translation.

Dans ce cas particulier, les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ~~dans~~ demeurent constants quand la date varie et leurs dérivées par rapport à t sont nulles. L'accélération absolue :

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{O_1M}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{O_1O}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{O_1O}}{dt^2} + x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2(\overrightarrow{O_1P})}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{O_1O}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{O_1O}}{dt^2}$$

En conclusion : si le mvt d'entraînement du repère $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_1$ est un mvt de translation,

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e$$

Cette propriété n'est plus vraie dans le cas d'un mvt d'entraînement quelconque.

Envisageons le cas où le mouvement d'entraînement est un mvt de translation uniforme. Alors $\vec{v}_e = Cte$ et $\vec{\gamma}_e = \vec{0}$. Alors $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r$

La conclusion est importante : le mvt d'un point matériel a même accélération dans 2 repères animés l'un par rapport à l'autre d'un mvt de translation uniforme.

Un corps tombe en chute libre dans le vide.
1°/ Sa trajectoire est verticale.
2°/ Tous les corps s'accompagnent dans leur mvt de chute libre dans le vide.
3°/ Le mvt de chute libre dans le vide est uniformément accéléré. Cette loi dont nous avons effectué des vérifications expérimentales en TP a été établie par Galilée. Galilée ne pouvait évidemment étudier la chute libre verticale, il fit une étude systématique du mvt de chute ralenti sur un plan incliné. Ayant constaté que ce mvt de chute ralentie est uniformément accéléré et que la relation dégagée pour cette inclinaison demeure vraie pour des inclinaisons croissantes, il postule qu'elle est encore vraie pour la chute libre verticale. La méthode est inductive (On y généralise une ~~généro~~ relation obtenu sur un nombre fini de cas, à l'infinité de cas possibles ; le postulat déterministe est à la base de la méthode inductive). Galilée peut être considéré comme le créateur de la méthode expérimentale.

On peut résumer les lois de ce mvt, les condenser en un seul énoncé, en disant qu'en un lieu donné, le vecteur accélération du mvt de chute libre dans le vide est un vecteur constant qui a pour support la verticale du lieu considéré et dont le sens est celui de la verticale descendante. On a coutume de désigner ce vecteur accélération par la lettre $\vec{g}$. Les expériences que nous avons réalisées permettent de déterminer une valeur approchée de cette accélération mais la précision qu'elle donne est médiocre. L'incertitude absolue de la mesure est de l'ordre de quelques unités de la 2e décimale (système SI).

Ce n'est que par voie indirecte que l'on peut déterminer avec précision cette accélération. Les laboratoires de gravimétrie effectuent cette détermination avec une précision remarquable : par exemple, en 1960 à Sèvre $g \simeq (9{,}80925649 \pm 0{,}00000005)\ m.s^{-2}$ (incertitude relative $\simeq 5.10^{-9}$)

$\vec{g}$ varie avec l'altitude et avec la latitude. g croît progressivement de l'équateur aux pôles de la valeur $9{,}78\ m.s^{-2}$ à $9{,}83\ m.s^{-2}$. Sous nos latitudes, on peut prendre $g \simeq 9{,}81\ m.s^{-2}$. $\vec{g}$ décroît avec l'altitude. Nous établirons que :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}$$

ou : $$g = g_0 \frac{1}{\left(1+\frac{z}{R}\right)^2}$$

Si z est petit devant R, alors $\frac{z}{R}$ est petit devant 1 et l'on peut écrire en utilisant la formule :
$(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\,\varepsilon \qquad n \in \mathbb{Q}$

$$g \simeq g_0\left(1 - 2\frac{z}{R}\right)$$

Si z est petit devant R, la variation relative de g lors du passage de l'altitude z_0 à z est :

$$\frac{\Delta g}{g} \simeq \frac{\Delta g}{g_0} = -\frac{2z}{R}$$

Equations du mvt de chute libre

Le corps est abandonné sans vitesse initiale

On oriente la trajectoire positivement vers le bas :

Avec ces conventions :

$z = \frac{1}{2} g t^2$

$v = g t$ et $v^2 = 2 g z$

z' — O origine (point de départ) — $\vec{g}$ — z

Le mobile est lancé avec une vitesse initiale verticale.

Nous supposerons par exemple $\vec{v}_0$ dirigé vers le haut. Nous avons le choix pour le sens positif adopté sur la verticale. Convenons de l'orienter vers le haut.

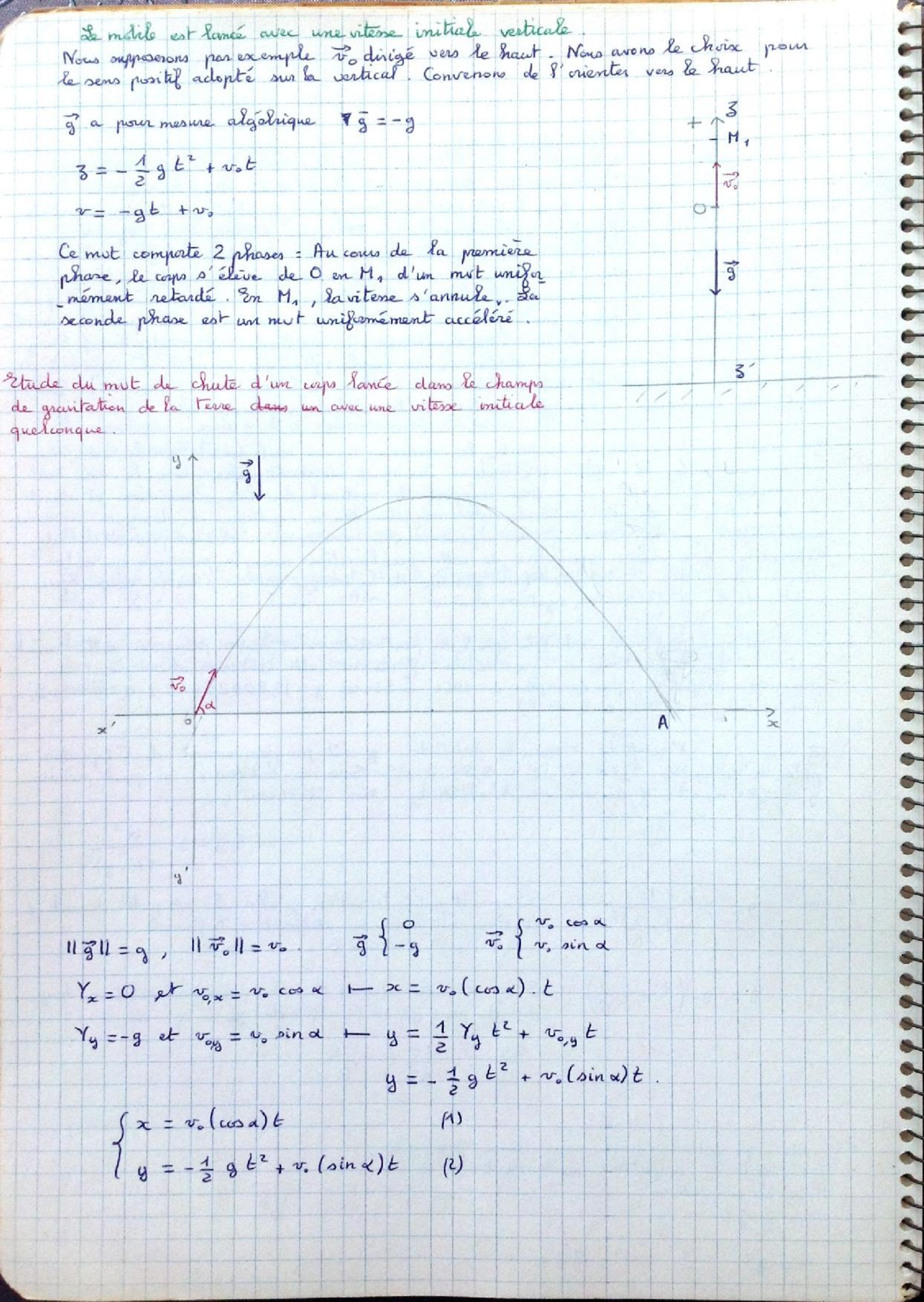
$\vec{g}$ a pour mesure algébrique $\bar{g} = -g$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

$$v = -gt + v_0$$

Ce mvt comporte 2 phases : Au cours de la première phase, le corps s'élève de O en M_1 d'un mvt uniformément retardé. En M_1, la vitesse s'annule. La seconde phase est un mvt uniformément accéléré.

Etude du mvt de chute d'un corps lancé dans le champs de gravitation de la Terre ~~dans~~ un avec une vitesse initiale quelconque.



$\|\vec{g}\| = g$, $\|\vec{v}_0\| = v_0$. $\vec{g}\begin{cases}0\\-g\end{cases}$ $\vec{v}_0\begin{cases}v_0 \cos\alpha\\v_0 \sin\alpha\end{cases}$

$\gamma_x = 0$ et $v_{0,x} = v_0 \cos\alpha \longmapsto x = v_0(\cos\alpha).t$

$\gamma_y = -g$ et $v_{0,y} = v_0 \sin\alpha \longmapsto y = \frac{1}{2}\gamma_y t^2 + v_{0,y} t$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0(\sin\alpha)t.$$

$$\begin{cases} x = v_0(\cos\alpha)t & (1)\\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0(\sin\alpha)t & (2)\end{cases}$$

(1) ⊢ $t = \dfrac{x}{v_0 (\cos\alpha)}$ (2) : $y = -\dfrac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \dfrac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} x$

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\mathrm{tg}\,\alpha)\, x$$

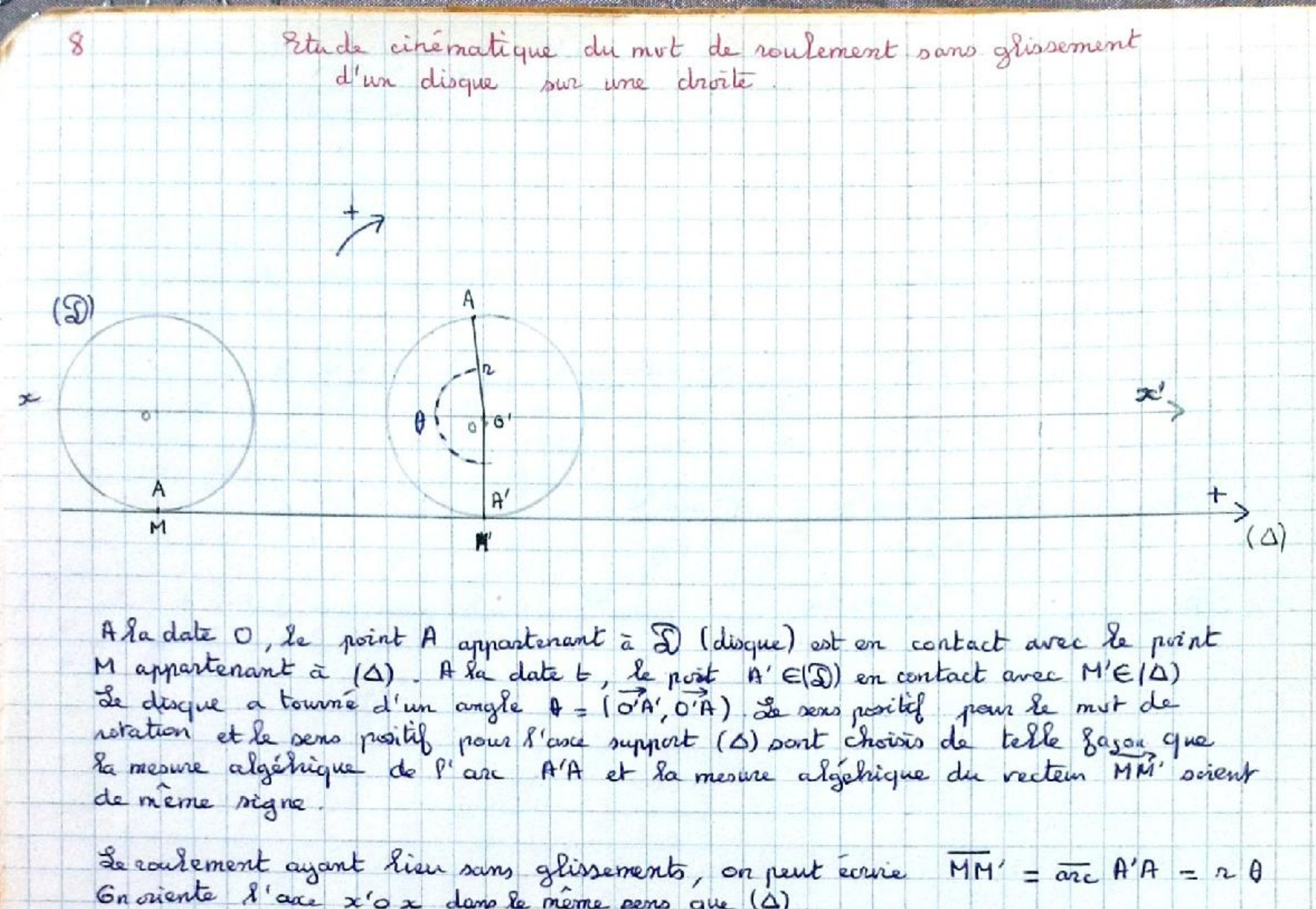
La trajectoire du mobile est une parabole (C). Les coordonnées du sommet S de cette parabole sont :

$$\begin{cases} x_S = -\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{-\dfrac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}} = \dfrac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \\ y_S = \dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha \, v_0^2 \cos^2\alpha}{2g} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \end{cases}$$

$\overline{OA} = 2 x_S = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ portée^qt^ maximale pour $\sin 2\alpha = 1$

$2\alpha = \dfrac{\pi}{2} \vdash \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Etude cinématique du mvt de roulement sans glissement d'un disque sur une droite



A la date 0, le point A appartenant à $\mathcal{D}$ (disque) est en contact avec le point M appartenant à (Δ). A la date t, le point $A' \in (\mathcal{D})$ en contact avec $M' \in (\Delta)$.
Le disque a tourné d'un angle $\theta = (\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'A})$. Le sens positif pour le mvt de rotation et le sens positif pour l'axe support (Δ) sont choisis de telle façon que la mesure algébrique de l'arc A'A et la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ soient de même signe.

Le roulement ayant lieu sans glissements, on peut écrire $\overline{MM'} = \text{arc } A'A = r\,\theta$
On oriente l'axe $x'ox$ dans le même sens que (Δ).

donc : $\overline{OO'} = r\,\theta = x$ (abscisse du centre du disque à la date t).
Soit $\vec{v}$ la vitesse du centre du disque à la date t. Elle a pour mesure algébrique :

$$v = \frac{dx}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt} \qquad (1)$$

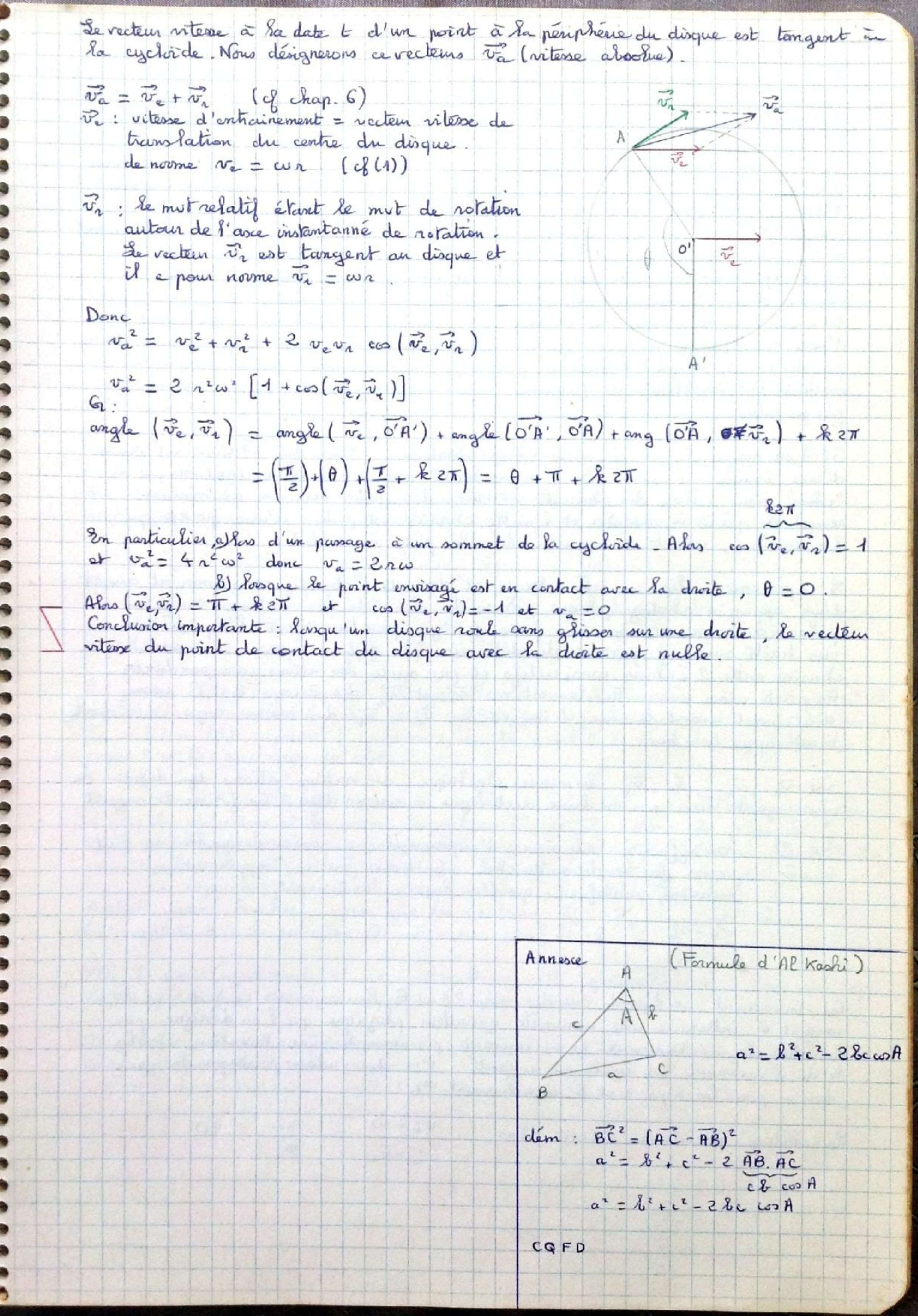
Que représente ici $\frac{d\theta}{dt}$? Ce mvt peut être décomposé en un mvt de translation du centre du disque sur l'axe $x'x$ et en un mvt de rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan du disque en son sens, axe de direction fixe que l'on appelle axe instantanné de rotation. $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ est précisément la vitesse angulaire à la date t dans le mvt de rotation autour de l'axe instantanné de rotation.

Le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ du mvt du centre du disque a pour mesure algébrique

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (\text{composante } \vec{\gamma}_T)$$

On a donc établit que les mesures algébriques des vecteurs vitesses et accélération du centre d'un disque qui roule sans glisser sur une droite sont respectivement égales aux mesures algébriques de la vitesse et de la composante tangentielle de l'accélération d'un point de la périphérie du disque qui serait animé autour de son axe supposé fixe d'une mvt de rotation de même vitesse angulaire instantannée.

Considérons maintenant un point quelconque de la périphérie du disque. On établit que la trajectoire de ce point est une cycloïde. Cette courbe présente périodiquement des points de rebroussement et l'équidistance de ces points est le périmètre du disque.



Le vecteur vitesse à la date t d'un point à la périphérie du disque est tangent à la cycloïde. Nous désignerons ce vecteur $\vec{v_a}$ (vitesse absolue).

$\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}$ (cf chap. 6)

$\vec{v_e}$: vitesse d'entraînement = vecteur vitesse de translation du centre du disque. de norme $v_e = \omega r$ (cf (1))

$\vec{v_r}$: le mvt relatif étant le mvt de rotation autour de l'axe instantané de rotation. Le vecteur $\vec{v_r}$ est tangent au disque et il a pour norme $\vec{v_r} = \omega r$.

Donc

$$v_a^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2\, v_e v_r \cos(\vec{v_e}, \vec{v_r})$$

$$v_a^2 = 2\, r^2\omega^2 \left[1 + \cos(\vec{v_e}, \vec{v_r})\right]$$

Or :

$$\text{angle}(\vec{v_e}, \vec{v_r}) = \text{angle}(\vec{v_e}, \vec{O'A'}) + \text{angle}(\vec{O'A'}, \vec{O'A}) + \text{ang}(\vec{O'A}, \vec{v_r}) + k2\pi$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right) + (\theta) + \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = \theta + \pi + k2\pi$$

En particulier, a) lors d'un passage à un sommet de la cycloïde. Alors $\theta = k2\pi$, $\cos(\vec{v_e}, \vec{v_r}) = 1$ et $v_a^2 = 4r^2\omega^2$ donc $v_a = 2r\omega$

b) lorsque le point envisagé est en contact avec la droite, $\theta = 0$.
Alors $(\vec{v_e}, \vec{v_r}) = \pi + k2\pi$ et $\cos(\vec{v_e}, \vec{v_r}) = -1$ et $v_a = 0$

Conclusion importante : lorsqu'un disque roule sans glisser sur une droite, le vecteur vitesse du point de contact du disque avec la droite est nulle.

Annexe (Formule d'Al Kashi)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

dém : $\vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,\underbrace{\vec{AB}.\vec{AC}}_{cb\cos A}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

CQFD

Introduction de la notion de masse d'inertie et de quantité de mvt.

On souhaite étudier expérimentalement des problèmes de choc entre 2 mobiles A et B. Dans le cas le plus simple, les mobiles se déplacent suivant une même droite sur un banc rectiligne. Si l'on souhaite étudier les chocs de 2 mobiles dans un espace à 2 dimension, on opère sur une table. On s'affranchit de la pesanteur en disposant le banc rectiligne ou la table horizontalement. On s'affranchit des frottements en opérant avec un banc (ou une table) à coussin d'air. Sur le banc à coussin d'air, les mobiles sont 2 chariots. Sur la table à coussin d'air, les mobiles sont 2 disques. Chariots ou disques sont munis d'une microlampe au néon qui est éclairée périodiquement et sans connections par des trains d'ondes hertziennes fournis par un générateur haute fréquence modulé en impulsions de fréquence connue (par exemple 25 ou 50 éclairs par seconde).

Si l'on souhaite réaliser des chocs élastiques, l'un des chariots est muni d'une boucle en acier. Si l'on souhaite réaliser un choc inélastique ou "choc mou", l'un des chariots est muni d'un petit tube en aluminium rempli de pâte à modeler et l'autre chariot est porteur d'une pointe qui, lors du choc, vient s'incruster dans la pâte à modeler.

L'expérience a lieu en salle obscure et devant l'objectif constamment ouvert d'un appareil photographique polaroïd. Les clichés obtenus sur film polaroïd se présente ~~son~~ sous forme de ligne ponctuée dont l'équidistance des traits successifs permet de déterminer la distance parcourue par chaque chariot entre 2 éclairs consécutifs et par suite les vitesses correspondantes. On peut ainsi connaître les vitesses $\vec{v}_a$ et $\vec{v}_b$ des 2 corps A et B immédiatement avant le choc et les vitesses $\vec{v}'_a$, $\vec{v}'_b$ des mêmes corps immédiatement après le choc.

Soit $\overline{v}_a$, $\overline{v}_b$, $\overline{v}'_a$, $\overline{v}'_b$ les mesures algébriques des vecteurs vitesses déjà définis. Le choc ayant lieu sur un banc rectiligne à coussin d'air. On forme le rapport

$\dfrac{\overline{v}'_b - \overline{v}_b}{\overline{v}'_a - \overline{v}_a}$. On effectue une série d'expériences au cours desquelles on fait varier les conditions du choc. On trouve que ce rapport est un invariant négatif. Ce que l'on exprime en écrivant :

$$\frac{\overline{v}'_b - \overline{v}_b}{\overline{v}'_a - \overline{v}_a} = -k$$

Cet invariant ne dépend que des corps A et B. Pour exprimer ce fait, on est conduit à introduire une nouvelle grandeur physique que l'on désigne par la lettre m. On introduit m en écrivant, par exemple, que la valeur absolue k de l'invariant est égale au rapport $\dfrac{m_a}{m_b}$ des valeurs prises par la grandeur m pour les corps a et b respectivement.

La relation précédente s'écrit alors
$$\frac{\overline{v}'_b - \overline{v}_b}{\overline{v}'_a - \overline{v}_a} = -\frac{m_a}{m_b} \qquad (1)$$

m_a caractérise l'aptitude du corps A à modifier d'une façon plus ou moins importante 9 à m_b la vitesse du corps B dans cette interaction de choc entre les 2 corps. m_a caractérise également la résistance, l'inertie qu'oppose le corps A à la modification de sa propre vitesse au cours du choc. Pour de telles raisons et de telles remarques, que l'on peut faire évidemment de la même façon à propos du corps B, la grandeur m est appelée masse d'inertie.

La masse d'inertie est une grandeur mesurable. Pour mesurer la masse d'inertie d'un corps B, il suffit de réaliser une expérience d'interaction de choc entre ce corps et un corps A de masse d'inertie connue. En fait, nous verrons que la mesure des masses d'inertie peut s'effectuer de toute autre façon à l'aide de balances. Par la suite, nous établirons une relation de proportionalité entre les grandeurs "masse d'inertie" et "masse de gravitation" cette dernière grandeur ayant été intro_ _duite en classe de seconde.

Notion de quantité de mouvement.

La relation (1) peut encore s'écrire : $-m_a \bar{v}_A' + m_a \bar{v}_a = m_b \bar{v}_b' - m_b \bar{v}_b$

$$m_a \bar{v}_a + m_b \bar{v}_b = m_a \bar{v}_a' + m_b \bar{v}_b'$$

Les 4 vecteurs $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$, $\vec{v}_a'$, $\vec{v}_b'$ étant, lors d'un choc réalisé sur le banc rectiligne, colinéaires, cette relation entraîne la relation vectorielle

$$m_a \vec{v}_a + m_b \vec{v}_b = m_a \vec{v}_a' + m_b \vec{v}_b' \qquad (2)$$

On introduit la grandeur vectorielle $\vec{p} = m\vec{v}$, produit du vecteur vitesse d'un corps par la masse d'inertie de ce corps. Cette grandeur est appelée quantité de mvt. La relation s'écrit alors $\vec{P}_a + \vec{P}_b = \vec{P}_a' + \vec{P}_b'$ (3)

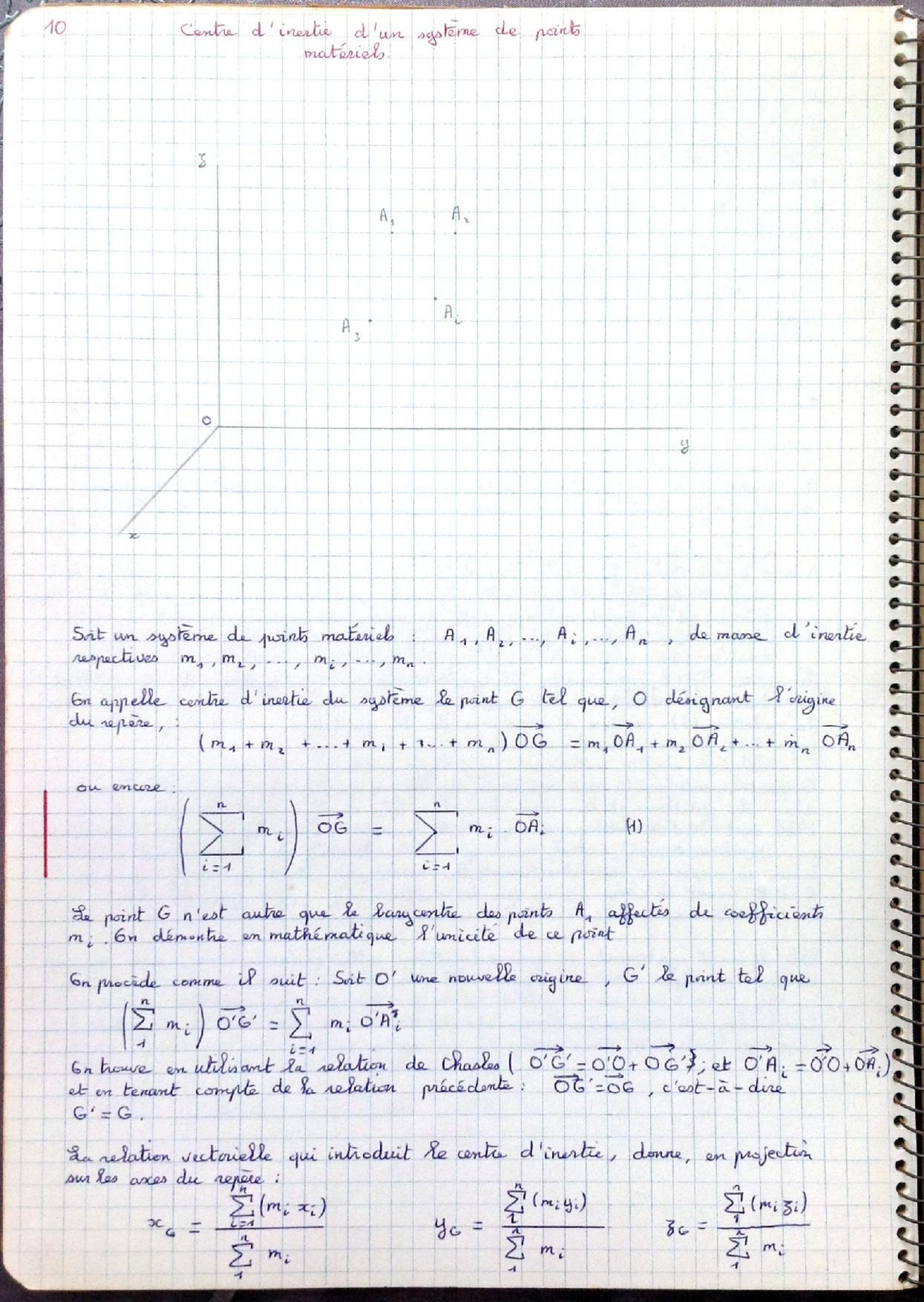
La somme $\vec{P}_a + \vec{P}_b$ exprime la quantité de mvt du système des 2 corps A et B immédiatement avant le choc (resp. $\vec{P}_a' + \vec{P}_b'$ = quantité de mvt après le choc). La relation (3) exprime l'invariance de la quantité de mvt du système des 2 corps A et B au cours du choc.

On peut ensuite répéter des expériences de choc en opérant sur une table à coussin d'air. Les directions et les normes des vecteurs $\vec{v}_a$ et $\vec{v}_b$ dans le plan de la table sont évidemment quelconques. L'examen du cliché obtenu permet de connaître les vecteurs $\vec{v}_a$ et $\vec{v}_b$ ainsi que les vecteurs $\vec{v}_a'$ et $\vec{v}_b'$. On peut ainsi tracer en respectant leur direction et leur norme, les vecteurs $\vec{P}_A$ et $\vec{P}_B$ des corps A et B avant le choc, ainsi que les vecteurs $\vec{P}_a'$, $\vec{P}_b'$ après le choc. On constate que la relation (3) est encore vérifiée.

Elle le serait également, et nous admettrons cette généralisation, dans une exp. de choc réalisée dans un espace à 3 dimensions.

La grandeur $\vec{p}$ est particulièrement importante. C'est, en tout cas, le premier invariant introduit dans ce cours.

Centre d'inertie d'un système de points matériels



Soit un système de points matériels : $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$, de masse d'inertie respectives $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$.

On appelle centre d'inertie du système le point G tel que, O désignant l'origine du repère, :

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_i + \dots + m_n)\,\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OA_n}$$

ou encore :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OA_i} \qquad (1)$$

Le point G n'est autre que le barycentre des points A_i affectés de coefficients m_i. On démontre en mathématique l'unicité de ce point

On procède comme il suit : Soit O' une nouvelle origine, G' le point tel que

$$\left(\sum_{1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{O'G'} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{O'A_i}$$

On trouve en utilisant la relation de Chasles ($\overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG'}$; et $\overrightarrow{O'A_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}$) et en tenant compte de la relation précédente : $\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OG}$, c'est-à-dire $G' = G$.

La relation vectorielle qui introduit le centre d'inertie, donne, en projection sur les axes du repère :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i x_i)}{\sum_{1}^{n} m_i} \qquad y_G = \frac{\sum_{1}^{n}(m_i y_i)}{\sum_{1}^{n} m_i} \qquad z_G = \frac{\sum_{1}^{n}(m_i z_i)}{\sum_{1}^{n} m_i}$$

Lorsque nous aurons établis la proportionalité entre la grandeur "masse d'inertie" et "masse gravitationnelle", nous en déduirons que le c. d'inertie est confondu avec le centre de gravité du système considéré.

Quantité de mvt d'un système matériel

Dérivons par rapport à t la relation (1) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \frac{d\vec{OG}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i \frac{d\vec{OA_i}}{dt}\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \vec{v}_G = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i \vec{v}_i\right) \qquad (2)$$

Le second membre exprime la quantité de mvt du système à la date t.
Le premier membre la quantité de mvt à la date t d'un point qui serait confondu avec le centre d'inertie (c.d.i) affecté de la masse totale du système et animé de la vitesse $\vec{v}_G$ du c.d.i

En conclusion : La quantité de mvt d'un système matériel quelconque est égale à la quantité de mvt d'un point matériel fictif qui serait affecté de la masse totale du système et animé de la vitesse $\vec{v}_G$ du c.d.i du système.

(Ce théorème est fondamental).

Loi d'inertie

Un disque lancé sur une table horizontale à coussin d'air peut être considéré comme libre de toute action extérieure (frottements négligeables, le mvt ayant lieu dans un plan horizontal, le disque est affranchi de l'action de la pesanteur). Ce disque est un système isolé. Or la néoncinégraphie du mvt révèle que le mvt du disque est un mvt de translation rectiligne uniforme. Cette propriété est vérifiée quelquesoit la direction de lancement, ce qui traduit l'isotropie de l'espace. Si le mvt du disque est rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$, la quantité de mvt $\vec{p} = m\vec{v}$ de ce solide isolé est constante. Ce résultat exprime dans le cas particulier du solide une propriété très générale applicable à un système materiel quelconque libre de toute action extérieure. Cette loi que nous admettons dans toute sa généralité est appelée loi d'inertie.

La quantité de mvt d'un système isolé système qui n'est soumis à aucune action exterieure est constante

Conséquence immédiate

Envisageons le cas particulier d'un système materiel dont la masse d'inertie est constante. Pour un tel système (solide ou deformable) la quantité de mouvement est donnée par la relation $\vec{p} = m\,\vec{v}_g$

Si le système est isolé ~~et par le~~ $\vec{p}$ est constante, $\vec{v}_g$ est constante. En conclusion, G (c.d.i) est animé d'un mvt de translation rectiligne uniforme.

L'étude des mvt des 2 composantes d'une étoile double (ex : Sirius et son compagnon) fournit à l'échelle de l'univers une bonne vérification de cette loi. En effet, les observations montrent qu'alors que les 2 composantes de l'étoile double décrivent des ellipses autour du c.d.i du système. Ce c.d.i. est animé d'un mvt de translation rectiligne uniforme.

Notion de force

Si l'on observe que la quantité de mvt d'un système varie avec la date, on attribue la cause de cette variation à une action extérieure exercée sur le système. On a coutume d'appeler "force" une telle action extérieure.

Supposons qu'entre 2 dates t et $t + \Delta t$, la quantité de mvt d'un système passe de la valeur $\vec{p}$ à la valeur $\vec{p} + \Delta\vec{p}$. On appelle force moyenne agissant sur le système entre ces 2 dates la grandeur définie par le rapport $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

Quand $\Delta t \to 0$, ce rapport tend vers une limite qui n'est autre que la dérivée $\frac{d\vec{p}}{dt}$. Cette dérivée exprime la force à la date t.

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1)$$

La relation (1) peut être considérée comme la relation de définition de la force.

Relation fondamentale de la dynamique.

Envisageons le cas particulier d'un système pour lequel la masse d'inertie peut être considérée comme constante. La quantité de mvt d'un tel système dont le c.d.i est animé de la vitesse $\vec{v}_g$ a pour expression : $\vec{p} = m\,\vec{v}_g$.

La force agissant sur le système a pour expression :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}_g}{dt} = m\,\vec{\gamma}_g$$

Nous noterons

$$\vec{F} = m\,\vec{\gamma} \qquad (2)$$

Remarque.

Alors que la relation (1) est très générale, la relation (2) n'est applicable qu'au cas d'un système materiel où la masse d'inertie est constante.

Notion de repère Galiléen.

Un repère dans lequel la loi d'inertie est satisfaite est dit Galiléen. La néocinégra-phie du mvt d'un disque lancé sur une table horizontale à coussin d'air nous montre qu'un repère lié au sol est galiléen. En fait, il s'agit là que d'une première approximation.

Supposons que sur la plateforme bien polie d'un véhicule en mvt rectiligne (horizont.) uniforme on lance un bloc de glace. Pour un observateur lié au véhicule, le mvt du bloc de glace est rectiligne uniforme. Un repère lié au véhicule est dans ce cas galiléen. Par contre, si le véhicule accélère (resp. ralenti), pour un observateur lié au véhicule, le mvt du bloc de glace ne sera plus rectiligne uniforme : Un repère lié à un véhicule qui a un mvt varié n'est pas galiléen.

Nous avons signalé plus haut que tout repère lié à la terre ne peut être Galiléen qu'en première approximation. Un repère rigoureusement Galiléen est celui défini par un système d'axes dits de Copernic. L'origine O de ce système d'axe est le c.d.i du système solaire et les axes ont des directions fixes par rapport aux étoiles.

Nous avons vu, en cinématique qu'un point matériel a même accélération dans deux repères animés l'un par rapport à l'autre d'un mvt de translation rectiligne uniforme. Par suite, tout repère en translation rectiligne uniforme par rapport au repère de Copernic est Galiléen. La loi d'inertie est vérifiée dans tout repère galiléen.

Théorème de l'action et de la réaction

On démontre, et nous admettrons cette loi, que dans une interaction entre 2 corps A et B, la force exercée par le corps B sur le corps A est opposée à la force exercée par le corps A sur le corps B.

Théorème du mvt du c.d.i d'un système.

Lorsqu'on se propose d'étudier le mvt d'un système matériel quelconque, on fait le bilan de toutes les forces appliqués au système.

Dans la relation $\vec{f} = m\,\vec{\gamma}_g$, $\vec{f}$ exprime la résultante de toutes les forces appliquées au système. On a coutume de distinguer à ce propos les forces dites intérieures au système et les forces extérieures appliqués au système.

Dans les forces intérieures, on trouve par exemple des forces d'action de contact entre 2 parties du système, des forces d'attraction newtonienne entre les différents points du système, des forces d'interactions électrostatiques... Toutes ces forces dites intérieures sont 2 à 2 opposées (cf théorème de l'action et de la réaction) et par suite leur résultante est nulle.

Dans la relation $\vec{f} = m\vec{\gamma}$, $\vec{f}$ exprime la résultante de toutes les forces extérieures agissant sur le système. On peut alors énoncer le théorème dit du mvt du c.d.i :

"Le c.d.i d'un système matériel a le même mvt qu'un point matériel qui serait confondu avec lui, qui serait affecté de toute la masse d'inertie du système et où seraient appliquées toutes les forces extérieures agissant sur le système".

Relation entre masse d'inertie et masse gravitationnelle

Nous avons vu qu'un corps soumis à la seule action du champ de gravitation de la terre tombe en chute libre verticale avec une accélération $\vec{\gamma} = \vec{g}$. La seule force extérieure agissant sur ce corps est son poids $\vec{P}$ et la relation $\vec{f} = m\vec{\gamma_G}$ s'écrit $\vec{P} = m\vec{g}$

Soit 2 corps A et B de masses d'inertie respective m_a et m_b situés en un même lieu, ces 2 corps tombent en chute libre avec la même accélération $\vec{g}$. Leurs poids respectifs sont $\vec{P_A}$ et $\vec{P_B}$ / $\begin{cases} \vec{P_A} = m_A\vec{g} \\ \vec{P_B} = m_B\vec{g} \end{cases}$

$$\frac{\vec{P_A}}{\vec{P_B}} = \frac{m_A}{m_B} \quad (1)$$

En classe de seconde, nous avons introduit la grandeur masse de gravitation en écrivant que le rapport des masses gravitationnelles M_A et M_B de 2 corps A et B est égale au rapport de leur poids en un même lieu.

$$\frac{\vec{P_A}}{\vec{P_B}} = \frac{M_A}{M_B} \quad (2)$$

donc : $\frac{m_A}{m_B} = \frac{M_A}{M_B} \mapsto \frac{m_A}{M_A} = \frac{m_B}{M_B} = K \quad (3)$

(3) exprime la proportionalité entre la masse d'inertie ~~du rapport~~ d'un corps et sa masse gravitationnelle. Rien ne nous empêche d'ailleurs d'attribuer la valeur 1 à K.
Alors, si $K = 1$, masse d'inertie et masse de gravitation du même corps s'expriment par le même nombre.

Nous avons défini le c.d.g d'un système de points matériels :
$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ de masses de gravitation respectives :
$M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$
Par la relation :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right)\vec{OG} = \sum_{i=1}^{n} M_i \vec{OA_i}$$

De ce qui précède, il résulte que c.d.g et c.d.i sont confondu.

Remarque

Dans ce qui précède, nous avons considéré la masse d'inertie d'un système comme constante. Cela n'est plus vrai dans le cas d'un corps dont la vitesse $\vec{v}$ ne peut pas être considérée comme négligeable par rapport à la célérité c de la lumière. On établit, dans le cadre de la théorie de la relativité, que la masse m d'un corps animé de la vitesse $\vec{v}$ est liée à la masse m_0 de ce même corps au repos (ou pratiquement animé de faible vitesse) par la relation

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$ formule de Lorentz

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

12 Application : problème de la fusée.

Soit une fusée dont la masse à la date 0 est m_0 (carburant et comburant compris). Les gaz résultant de la combustion sont éjectés vers l'arrière de la fusée avec une vitesse $\vec{u}$ par rapport au corps de la fusée. Il en résulte une force de poussée de sens opposé au vecteur $\vec{u}$ (c'est la propulsion par réaction).

On rapporte le mvt de la fusée à un repère de Copernic. A la date t, la vitesse de la fusée par rapport à ce repère est $\vec{v}$, la masse de la fusée est m. Si l'on désigne par a le débit de gaz, c'est-à-dire la masse de gaz éjectée par seconde, il vient : $m = m_0 - at$. Entre les dates t et $t + \Delta t$, la fusée a éjecté une masse de gaz $(a\,\Delta t)$. Sa masse est devenue $m - a\Delta t$ et sa vitesse $(\vec{v} + \Delta\vec{v})$.

Si f désigne la force moyenne exercée sur le système entre ces 2 dates, on peut écrire :

$$\vec{f}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$ $\Delta\vec{p}$: variation de la quantité de mvt du système.

$\vec{f}_m \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$ = quantité de mvt à la date $(t + \Delta t)$ − quant. de mvt à la date t

$$= (m - a\Delta t)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + a\,\Delta t\,(\vec{u} + \vec{v}) - m\vec{v}$$

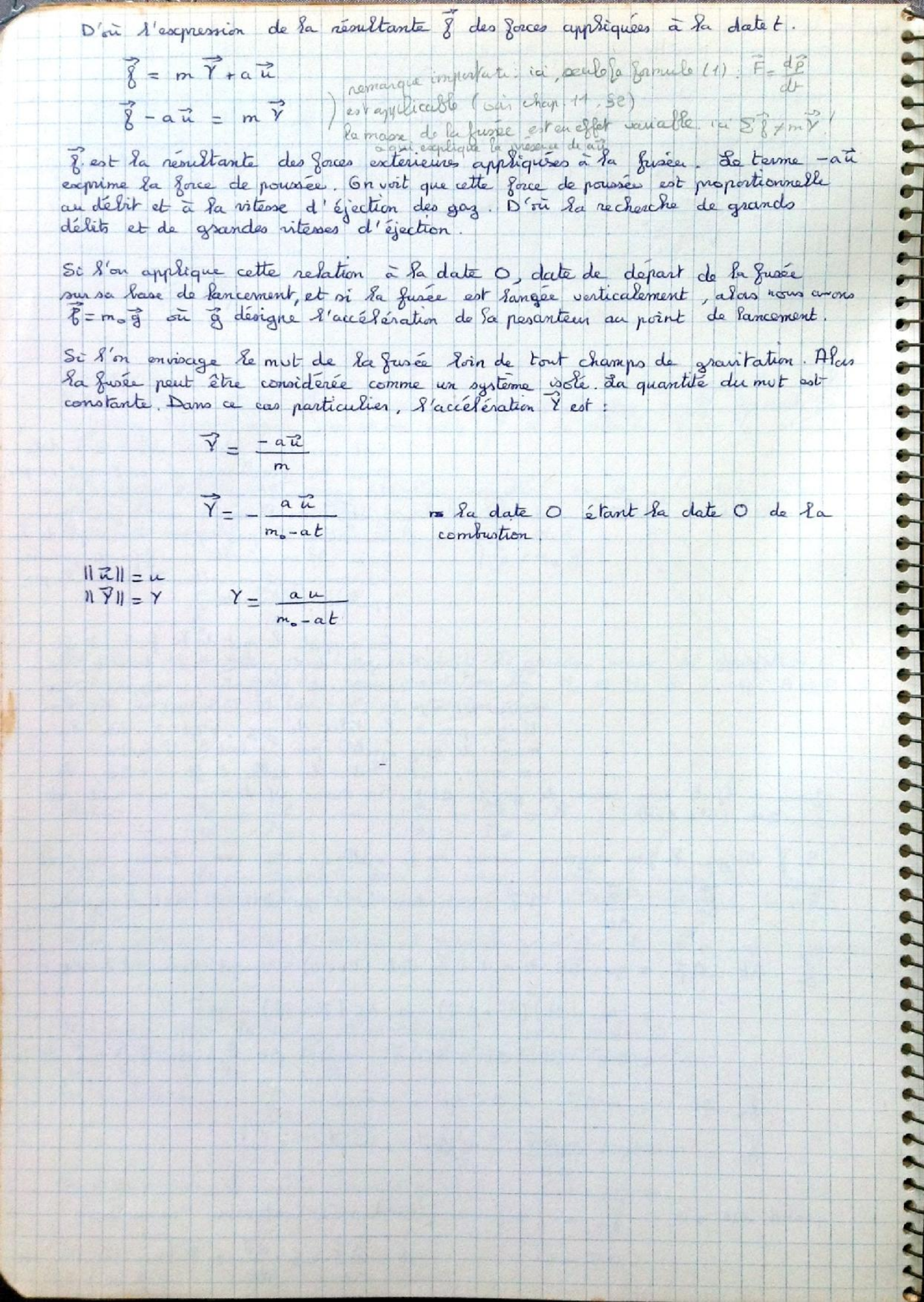
$$= m\vec{v} - a\vec{v}\Delta t + m\Delta\vec{v} - a\Delta\vec{v}\cdot\Delta t + a\,\Delta t\,\vec{v} + a\vec{u}\,\Delta t - m\vec{v}$$

$$\vec{f}_m \cdot \Delta t = m\Delta\vec{v} - a\Delta\vec{v}\Delta t + a\vec{u}\Delta t$$

$$\vec{f}_m = \frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t} - a\Delta\vec{v} + a\vec{u}$$

quand $\Delta t \to 0$ $\quad \vec{f}_m \to \vec{f}$ = force instantanée (extérieure au système)

$\Delta\vec{v} \to \vec{0}$ et $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \to \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\gamma}$ (accélération de la fusée).



D'où l'expression de la résultante $\vec{f}$ des forces appliquées à la date t.

$$\vec{f} = m\vec{\gamma} + a\vec{u}$$

$$\vec{f} - a\vec{u} = m\vec{\gamma}$$

remarque importante : ici, seule la formule (1) : $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ est applicable (voir chap. 11, §e)
la masse de la fusée est en effet variable. ici $\Sigma \vec{f} \neq m\vec{\gamma}$!
ce qui explique la présence de $a\vec{u}$

$\vec{f}$ est la résultante des forces extérieures appliquées à la fusée. Le terme $-a\vec{u}$ exprime la force de poussée. On voit que cette force de poussée est proportionnelle au débit et à la vitesse d'éjection des gaz. D'où la recherche de grands débits et de grandes vitesses d'éjection.

Si l'on applique cette relation à la date 0, date de départ de la fusée sur sa base de lancement, et si la fusée est rangée verticalement, alors nous avons $\vec{f} = m_0\vec{g}$ où $\vec{g}$ désigne l'accélération de la pesanteur au point de lancement.

Si l'on envisage le mvt de la fusée loin de tout champs de gravitation. Alors la fusée peut être considérée comme un système isolé. La quantité du mvt est constante. Dans ce cas particulier, l'accélération $\vec{\gamma}$ est :

$$\vec{\gamma} = \frac{-a\vec{u}}{m}$$

$$\vec{\gamma} = -\frac{a\vec{u}}{m_0 - at}$$

la date 0 étant la date 0 de la combustion.

$\|\vec{u}\| = u$
$\|\vec{\gamma}\| = \gamma$

$$\gamma = \frac{au}{m_0 - at}$$

Application de la relation $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ à l'étude de quelques mvts.

Mouvement d'une particule électrisée dans un champs électrique uniforme

La particule peut être un électron, un proton, une particule α, un ion, ...
Nous envisagerons le cas d'une particule électrisée positivement de charge électrique q (il serait facile de transposer les résultats obtenus dans le cas d'une particule électrisée négativement).

1) Premier cas : A la date O, la particule est abandonnée sans vitesse initiale dans le champs électrique uniforme $\vec{E}$.

De la part du champs électrique $\vec{E}$, elle est soumise à une force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$. Même pour un champs électrique faible, le poids $m\vec{g}$ de la particule est parfaitement négligeable devant $\vec{F}$.

Ce mvt étant supposé avoir lieu dans le vide, on peut considérer que la seule force appliquée à la particule est la force électrostatique.

$$\vec{f} = q\vec{E} = m\vec{\gamma} \vdash \vec{\gamma} = \frac{q}{m}\vec{E} = \text{constante}$$

La fonction horaire de ce mvt sur l'axe $x'x$ où l'on prend comme origine la position de la particule à la date O s'écrit :

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{q}{2m} E \cdot t^2$$

Si par exemple, ce champs électrique uniforme est créé entre 2 armatures planes, métalliques et parallèles entre lesquelles on applique une d.d.p. U volts, ce champs $\vec{E}$ est normal aux armatures, dirigé de l'armature + vers l'armature − $\vec{E}$ a pour norme $E = \frac{U}{d}$ où d désigne la distance des armatures.

Si, à la date O, la particule positive se trouve contre l'armature positive, on détermine sa vitesse à l'arrivée sur l'armature négative en procédant comme il suit :

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{q}{2m} \cdot \frac{U}{d} t^2$$

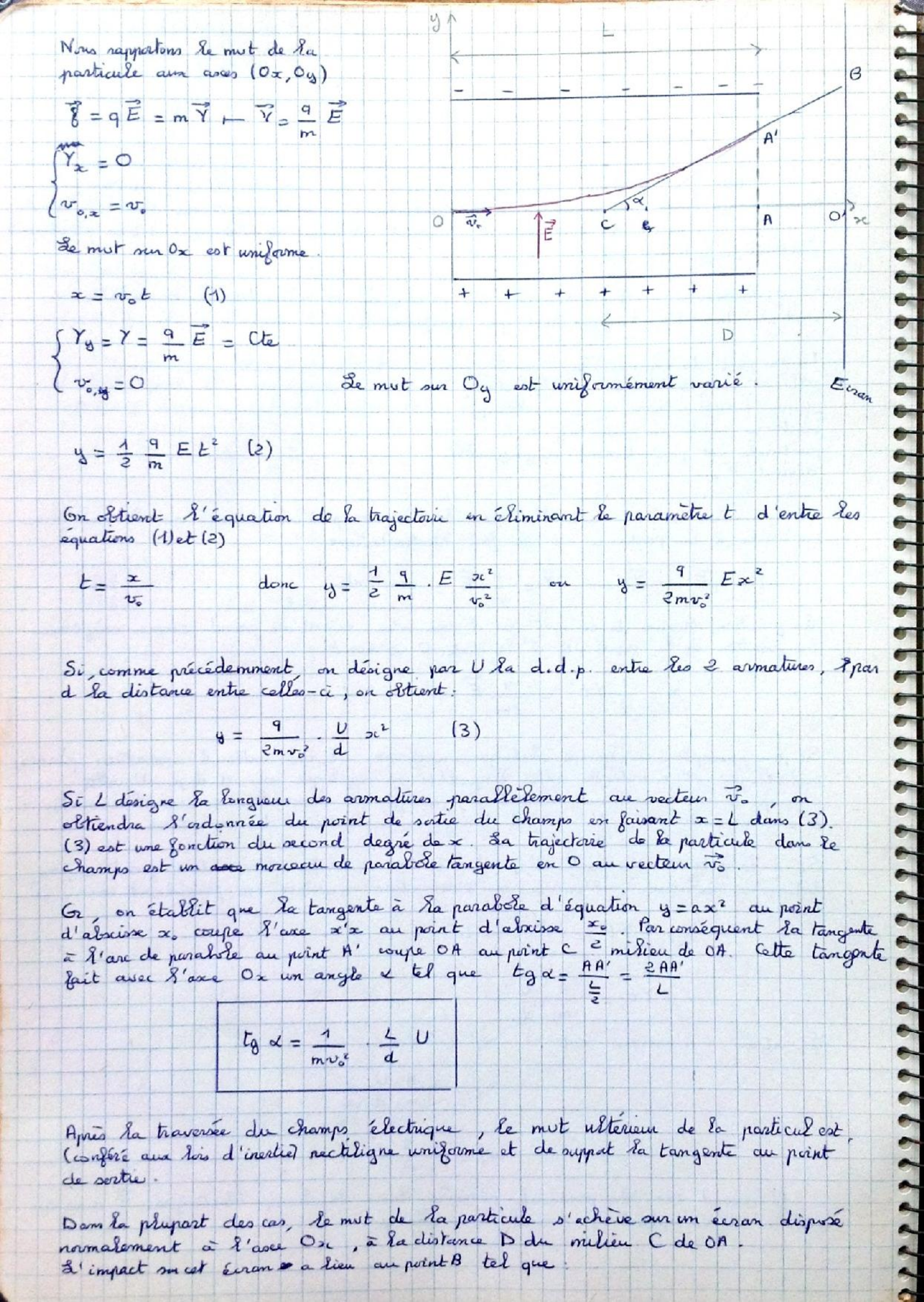
$$v = \gamma t = \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} t$$

La vitesse à l'arrivée est : $v_1^2 = 2\gamma x$

$$v_1^2 = 2 \frac{q}{m} \cdot \frac{U}{d} \underbrace{x}_{=d}$$

$$v_1^2 = 2 \frac{q}{m} U$$

2) Second cas : La particule pénètre dans le champs électrique $\vec{E}$ avec un vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ normal à ce champs.



Nous rapportons le mvt de la particule aux axes (Ox, Oy)

$$\vec{f} = q\vec{E} = m\vec{\gamma} \rightarrow \vec{\gamma} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

$$\begin{cases} \gamma_x = 0 \\ v_{0,x} = v_0 \end{cases}$$

Le mvt sur Ox est uniforme.

$$x = v_0 t \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \gamma_y = \gamma = \frac{q}{m}\vec{E} = Cte \\ v_{0,y} = 0 \end{cases}$$

Le mvt sur Oy est uniformément varié.

$$y = \frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2 \qquad (2)$$

On obtient l'équation de la trajectoire en éliminant le paramètre t d'entre les équations (1) et (2)

$$t = \frac{x}{v_0} \qquad \text{donc} \quad y = \frac{1}{2}\frac{q}{m}.E\frac{x^2}{v_0^2} \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{q}{2mv_0^2}Ex^2$$

Si, comme précédemment, on désigne par U la d.d.p. entre les 2 armatures, et par d la distance entre celles-ci, on obtient :

$$y = \frac{q}{2mv_0^2}\cdot\frac{U}{d}x^2 \qquad (3)$$

Si L désigne la longueur des armatures parallèlement au vecteur $\vec{v}_0$, on obtiendra l'ordonnée du point de sortie du champs en faisant $x = L$ dans (3).
(3) est une fonction du second degré de x. La trajectoire de la particule dans le champs est un ~~arc~~ morceau de parabole tangente en O au vecteur $\vec{v}_0$.

Or, on établit que la tangente à la parabole d'équation $y = ax^2$ au point d'abscisse x_0 coupe l'axe $x'x$ au point d'abscisse $\frac{x_0}{2}$. Par conséquent la tangente à l'arc de parabole au point A' coupe OA au point C milieu de OA. Cette tangente fait avec l'axe Ox un angle α tel que $tg\,\alpha = \frac{AA'}{\frac{L}{2}} = \frac{2AA'}{L}$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{1}{mv_0^2}\cdot\frac{L}{d}U}$$

Après la traversée du champs électrique, le mvt ultérieur de la particul est (conféré aux lois d'inertie) rectiligne uniforme et de support la tangente au point de sortie.

Dans la plupart des cas, le mvt de la particule s'achève sur un écran disposé normalement à l'axe Ox, à la distance D du milieu C de OA.
L'impact sur cet écran a lieu au point B tel que :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{O'B}{D} \quad \vdash \quad O'B = \operatorname{tg}\alpha . D = \frac{q}{m v_0^2} . \frac{L}{d} . U . D$$

On voit que O'B (déflexion électrostatique) est proportionnelle à la d.d.p. U.

Etude dynamique du mvt rectiligne sinusoïdaux.

1°/ Expression de la force appliquée à un mobile en mvt rectiligne sinusoïdal.
Un point matériel de masse d'inertie m est animé sur un axe $x'x$ d'un mvt rectiligne sinusoïdal de pulsation ω (en rd . s^{-1})
Soit $x = a \sin(\omega t + \varphi)$ la fonction horaire du mvt.
Nous avons obtenu, par 2 dérivations successives les mesures algébriques des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\gamma = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

soit $\gamma = -\omega^2 x$ $\quad \vec{\gamma} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$ est à chaque instant proportionnel au vecteur élongation $\overrightarrow{OM}$ et de signe contraire. Si $\vec{F}$ désigne la force appliquée à ce point matériel, on a :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \quad \vdash \quad \vec{F} = -m\omega^2 \overrightarrow{OM} \qquad \bar{f} = -m\omega^2 x$$

$$\text{ou} \quad \bar{f} = -kx \quad \text{en posant } k = m\omega^2$$

La force appliquée au mobile est à chaque instant proportionnel à l'élongation du mobile et de signe contraire. $\vec{F}$ est donc une force de rappel.

x' — A' — O — $f\vec{F}$ ← x — A — x

On remarque que pour $x = 0$, $\vec{F} = \vec{O}$. O est la position d'équilibre du mobile.

Réciproquement, supposons qu'un point matériel de masse d'inertie m soit soumis à une force $\vec{F}$ de support $x'x$ constamment proportionnelle à l'élongation x et de signe contraire à cette élongation : $\bar{F} = -kx$

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \quad \vdash \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \vdash \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

L'équation différentielle du mvt est une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants et à second membre nul. Nous savons que la solution de cette équation différentielle est une fonction sinusoïdale de la date, de pulsation ω telle que $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

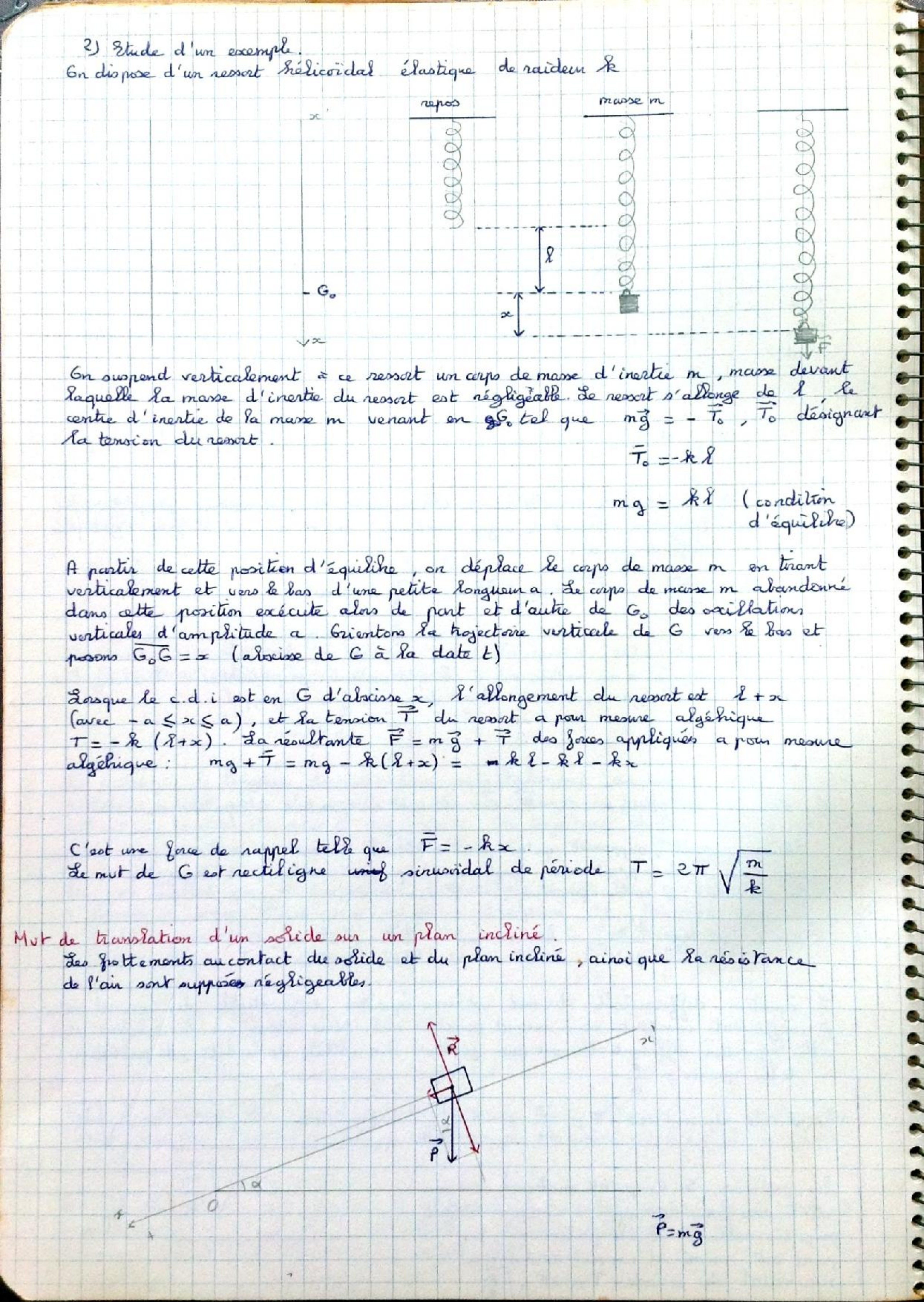
La période du mvt est $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$f = -kx$, donc	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	

En conclusion : Si un point matériel est soumis à une force de rappel à chaque instant proportionnelle à l'élongation x, ce point est animé d'un mvt rectiligne sinusoïdal de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

2) Etude d'un exemple.

On dispose d'un ressort hélicoïdal élastique de raideur k



On suspend verticalement à ce ressort un corps de masse d'inertie m, masse devant laquelle la masse d'inertie du ressort est négligeable. Le ressort s'allonge de ℓ, le centre d'inertie de la masse m venant en G_0 tel que $m\vec{g} = -\vec{T_0}$, $\vec{T_0}$ désignant la tension du ressort.

$$\bar{T_0} = -k\ell$$

$$mg = k\ell \quad \text{(condition d'équilibre)}$$

A partir de cette position d'équilibre, on déplace le corps de masse m en tirant verticalement et vers le bas d'une petite longueur a. Le corps de masse m abandonné dans cette position exécute alors de part et d'autre de G_0 des oscillations verticales d'amplitude a. Orientons la trajectoire verticale de G vers le bas et posons $\overline{G_0G} = x$ (abscisse de G à la date t)

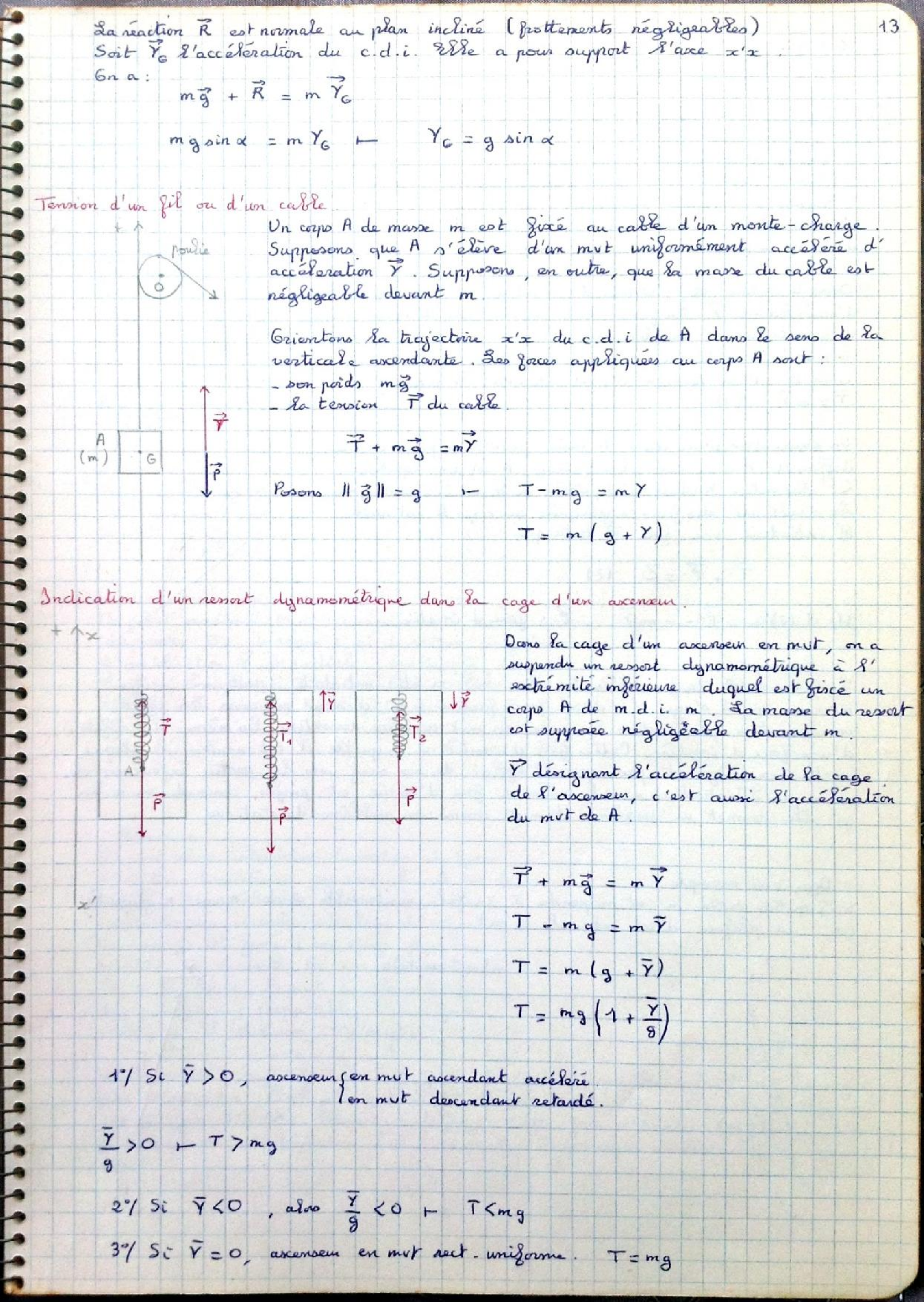
Lorsque le c.d.i est en G d'abscisse x, l'allongement du ressort est $\ell + x$ (avec $-a \leq x \leq a$), et la tension $\vec{T}$ du ressort a pour mesure algébrique $T = -k(\ell + x)$. La résultante $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$ des forces appliquées a pour mesure algébrique : $mg + \bar{T} = mg - k(\ell + x) = k\ell - k\ell - kx$

C'est une force de rappel telle que $\bar{F} = -kx$.

Le mvt de G est rectiligne ~~unif~~ sinusoïdal de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Mvt de translation d'un solide sur un plan incliné.

Les frottements au contact du solide et du plan incliné, ainsi que la résistance de l'air sont supposés négligeables.



La réaction $\vec{R}$ est normale au plan incliné (frottements négligeables)
Soit $\vec{\gamma}_G$ l'accélération du c.d.i. Elle a pour support l'axe $x'x$.
On a :

$$m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{\gamma}_G$$

$$mg\sin\alpha = m\gamma_G \vdash \gamma_G = g\sin\alpha$$

Tension d'un fil ou d'un cable

Un corps A de masse m est fixé au cable d'un monte-charge. Supposons que A s'élève d'un mvt uniformément accéléré d'accélération $\vec{\gamma}$. Supposons, en outre, que la masse du cable est négligeable devant m.

Orientons la trajectoire $x'x$ du c.d.i de A dans le sens de la verticale ascendante. Les forces appliquées au corps A sont :
- son poids $m\vec{g}$
- la tension $\vec{T}$ du cable.

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{\gamma}$$

Posons $\|\vec{g}\| = g \vdash T - mg = m\gamma$

$$T = m(g + \gamma)$$

Indication d'un ressort dynamométrique dans la cage d'un ascenseur.

Dans la cage d'un ascenseur en mvt, on a suspendu un ressort dynamométrique à l'extrémité inférieure duquel est fixé un corps A de m.d.i. m. La masse du ressort est supposée négligeable devant m.

$\vec{\gamma}$ désignant l'accélération de la cage de l'ascenseur, c'est aussi l'accélération du mvt de A.

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{\gamma}$$

$$T - mg = m\bar{\gamma}$$

$$T = m(g + \bar{\gamma})$$

$$T = mg\left(1 + \frac{\bar{\gamma}}{g}\right)$$

1°/ Si $\bar{\gamma} > 0$, ascenseur { en mvt ascendant accéléré / en mvt descendant retardé.

$\frac{\bar{\gamma}}{g} > 0 \vdash T > mg$

2°/ Si $\bar{\gamma} < 0$, alors $\frac{\bar{\gamma}}{g} < 0 \vdash T < mg$

3°/ Si $\bar{\gamma} = 0$, ascenseur en mvt rect. uniforme. $T = mg$

4°/ $\vec{\gamma} = \vec{g}$

Introduction de la notion de force d'inertie.

Etude d'un exemple

Dans la cabine d'une fusée animée par rapport à un repère galiléen d'un mvt de translation d'accélération $\vec{\gamma}$ est suspendu à un ressort de masse négligeable un corps A de m. d. i. m.

Dans le repère R_1, le mvt de a est un mvt de translation d'accélération $\vec{\gamma}$. La fusée étant supposée loin de tout champs de gravitation, un observateur lié au repère R_1 traduit le mvt de A en écrivant que la seule force appliquée au corps A est la tension du fil. Il écrit la relation

$\vec{T} = m\vec{\gamma}$ (1)

Un observateur placé dans la fusée part d'un point de vue différent. Pour un tel observateur, A est en équilibre. Cet observateur traduit l'équilibre de A en écrivant que la résultante des forces appliquées au corps A est nulle. Il introduit une force $\vec{\varphi}$ telle que :

$$\vec{T} + \vec{\varphi} = \vec{0} \quad (2)$$

(1) et (2) ⊢ $\vec{\varphi} = -m\vec{\gamma}$ $\vec{\varphi}$: force d'inertie.

+ ↑ $\vec{\gamma}$ ↑ $\vec{T}$ A R_1

Remarque

La façon dont la force d'inertie $\vec{\varphi} = -m\vec{\gamma}$ a été introduite peut nous inciter à croire qu'il s'agit là d'une force fictive, or, il n'en est rien. En effet, un observateur placé dans la fusée en mvt accéléré ressentira lui même les effets d'une force d'inertie. Cette force d'inertie à laquelle il est soumis le plaque contre son siège et provoque l'afflux de son sang vers les parties inférieures de son corps. L'introduction de la notion de force d'inertie est parfois commode en ce sens qu'elle permet un problème de mvt comme un problème de statique.

Deuxième exemple.

Un corps A de masse m est suspendu à un fil inextensible et de masse négligeable fixé au plafond d'un véhicule en mvt.

$\vec{\gamma}$ → $\vec{T}$ α $\vec{F} = -m\vec{\gamma}$ $\vec{P}$

vitesse constante $\vec{T}$ $\vec{P}$

← $\vec{\gamma}$ α $\vec{T}$ $\vec{P}$

Nous supposerons ce mvt de translation rectiligne uniformément accéléré de vecteur $\vec{\gamma}$ 14
L'expérience montre que le fil s'incline par rapport à la verticale du point de suspension, d'un angle α en sens inverse du sens du déplacement.

Pour un observateur O_1 lié au repère $\mathcal{R}_1$, A de masse m est en mvt rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{\gamma}$. Cet observateur écrit que la résultante $\vec{F}$ des forces appliquées en ce point est $\vec{F} = m\vec{\gamma}$.
Ces forces sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.

$$tg\,\alpha = \frac{\gamma}{g}$$

Un observateur O_2 placé dans le véhicule rapporte le mvt à un repère $\mathcal{R}_2$ lié à ce véhicule. Or, pour un tel observateur le corps A est en équilibre. O_2 exprime la condition d'équilibre en écrivant la relation :

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{\varphi} = \vec{0}$$ $\vec{\varphi}$ = force d'inertie $= -m\vec{\gamma}$

On retrouve évidemment la relation $tg\,\alpha = \dfrac{\gamma}{g}$

---

14 Etude dynamique du mvt circulaire uniforme

Expression de la force responsable d'un tel mvt.

Un point matériel M de masse d'inertie m est animé d'un mvt circulaire uniforme de centre O, de rayon r et de vitesse angulaire ω
L'accélération $\vec{\gamma}$ est radiale, centripète, de norme $\|\vec{\gamma}\| = \gamma = \omega^2 r$
La force $\vec{F}$ appliquée à ce point matériel ~~est~~ a pour expression $\vec{F} = m\vec{\gamma}$.
Elle est donc radiale, centripète de norme $F = m\omega^2 r$

$$\boxed{F = m\omega^2 r} \qquad \boxed{\gamma = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}}$$

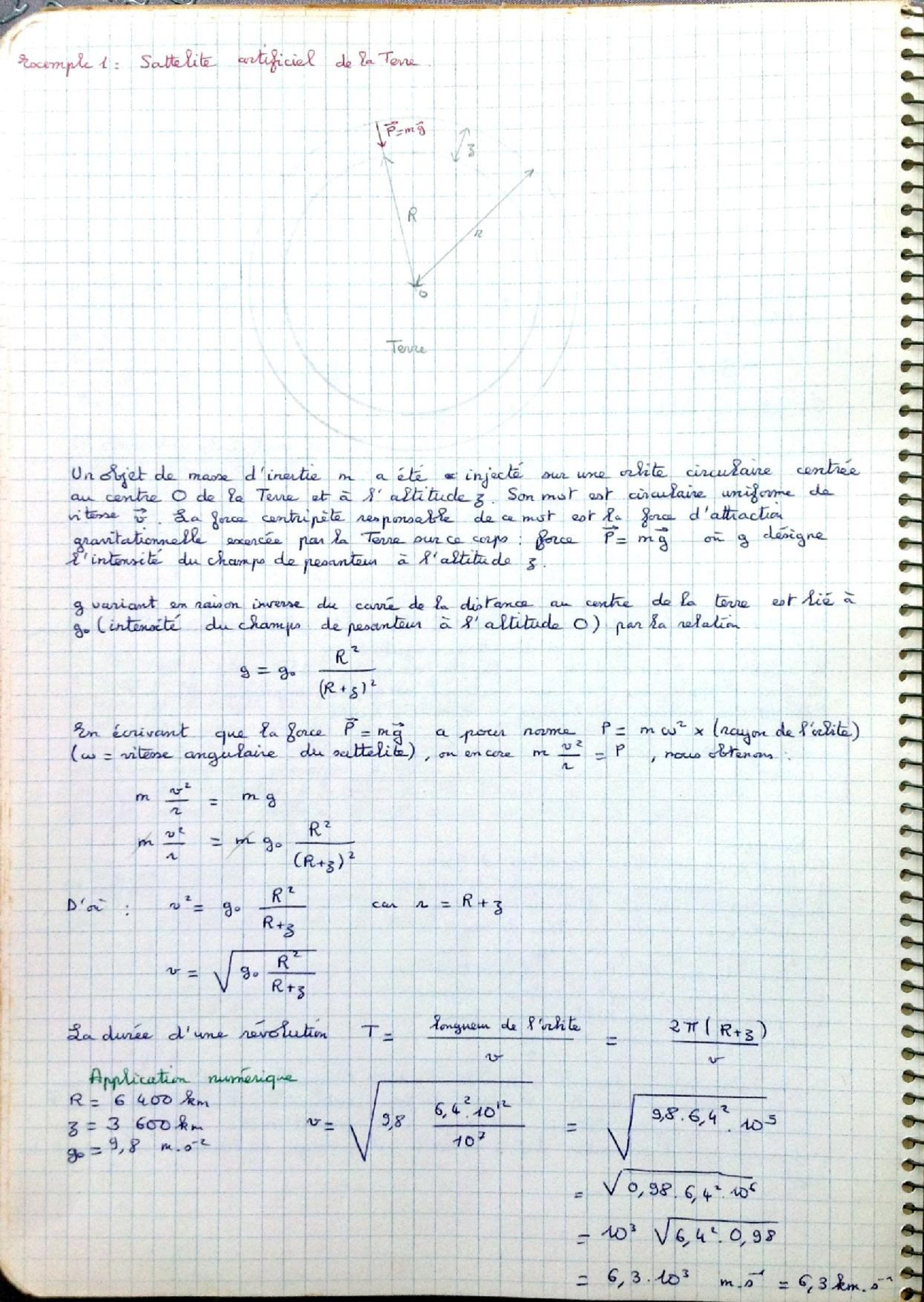
O $\vec{F}$ M $\vec{\gamma}$

Remarque

On peut encore introduire la notion de force d'inertie. Considérons par exemple le cas du passager d'un véhicule décrivant à vitesse constante une courbe circulaire de rayon r. Ce passager est fixé à son siège par une ceinture de sécurité. Pour un observateur lié à la route, le mvt circulaire uniforme du passager est imputable à une force centripète $\vec{F}$ de norme $F = m\dfrac{v^2}{r}$.

Un observateur placé dans le véhicule traduit l'équilibre relatif du passager par la condition $\vec{F} + \vec{\varphi} = \vec{0}$, $\vec{F}$ étant la force centripète : $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, donc $\varphi = -m\vec{\gamma}$ est la force d'inertie. Elle est centrifuge. Cette force d'inertie centrifuge n'est fictive que pour l'observateur lié à la route. Le passager du véhicule en ressent les effets.

Exemple 1 : Sattelite artificiel de la Terre



Un objet de masse d'inertie m a été injecté sur une orbite circulaire centrée au centre O de la Terre et à l'altitude z. Son mvt est circulaire uniforme de vitesse $\vec{v}$. La force centripète responsable de ce mvt est la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur ce corps : force $\vec{P} = m\vec{g}$ où g désigne l'intensité du champs de pesanteur à l'altitude z.

g variant en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre est lié à g_0 (intensité du champs de pesanteur à l'altitude 0) par la relation

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}$$

En écrivant que la force $\vec{P} = m\vec{g}$ a pour norme $P = m\omega^2 \times$ (rayon de l'orbite) (ω = vitesse angulaire du sattelite), ou encore $m\frac{v^2}{r} = P$, nous obtenons :

$$m\frac{v^2}{r} = mg$$

$$m\frac{v^2}{r} = m g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}$$

D'où : $v^2 = g_0 \frac{R^2}{R+z}$ car $r = R+z$

$$v = \sqrt{g_0 \frac{R^2}{R+z}}$$

La durée d'une révolution $T = \frac{\text{longueur de l'orbite}}{v} = \frac{2\pi(R+z)}{v}$

Application numérique

$R = 6\,400$ km

$z = 3\,600$ km

$g_0 = 9,8$ $m.s^{-2}$

$$v = \sqrt{9,8 \frac{6,4^2.10^{12}}{10^7}} = \sqrt{9,8.6,4^2.10^5}$$

$$= \sqrt{0,98.6,4^2.10^6}$$

$$= 10^3\sqrt{6,4^2.0,98}$$

$$= 6,3.10^3 \ m.s^{-1} = 6,3 \ km.s^{-1}$$

durée d'une révolution : $T = 2\pi \frac{10^7}{6,3 \cdot 10^3}$

$T = 10^4 s$

Pendule conique

(Δ) est un axe de rotation verticale auquel est articulé en un point O une tige OA de masse négligeable. A l'extrémité A de la tige est fixé un corps de petite dimension de masse d'inertie m. Le système tige - masse m est entraîné par la rotation de l'axe vertical avec une vitesse angulaire ω rd.s⁻¹. L'expérience montre qu'à partir d'une certaine valeur ω_0 de cette vitesse angulaire, la tige se détache de l'axe et que, si l'on maintient cette vitesse angulaire à une valeur constante $\omega > \omega_0$, la tige décrit autour de (Δ) un cône de révolution d'axe (Δ), de demi-angle au sommet α. Le problème est d'exprimer la relation existant entre ω, α, la longueur ℓ de la tige et l'accélération g de la pesanteur.

A décrit un cercle orthogonal à (Δ), de rayon $r = \ell \sin\alpha$.
On interprète le mvt circulaire uniforme de la masse m en écrivant que la résultante $\vec{F}$ des forces appliquées à A est radiale, centripète et de norme $F = m\omega^2 r$

Or les forces appliquées sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ de la tige.

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$$

En projection sur y'y : $mg - T\cos\alpha = 0$ (1)
En projection sur x'x : $T\sin\alpha = m\omega^2 r = m\omega^2 \ell \sin\alpha$ (2)

On obtient : $T = m\omega^2 \ell$ donc $\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 \ell}$

Avec la condition $\frac{g}{\omega^2 \ell} \leq 1 \vdash \omega^2 \geq \frac{g}{\ell}$

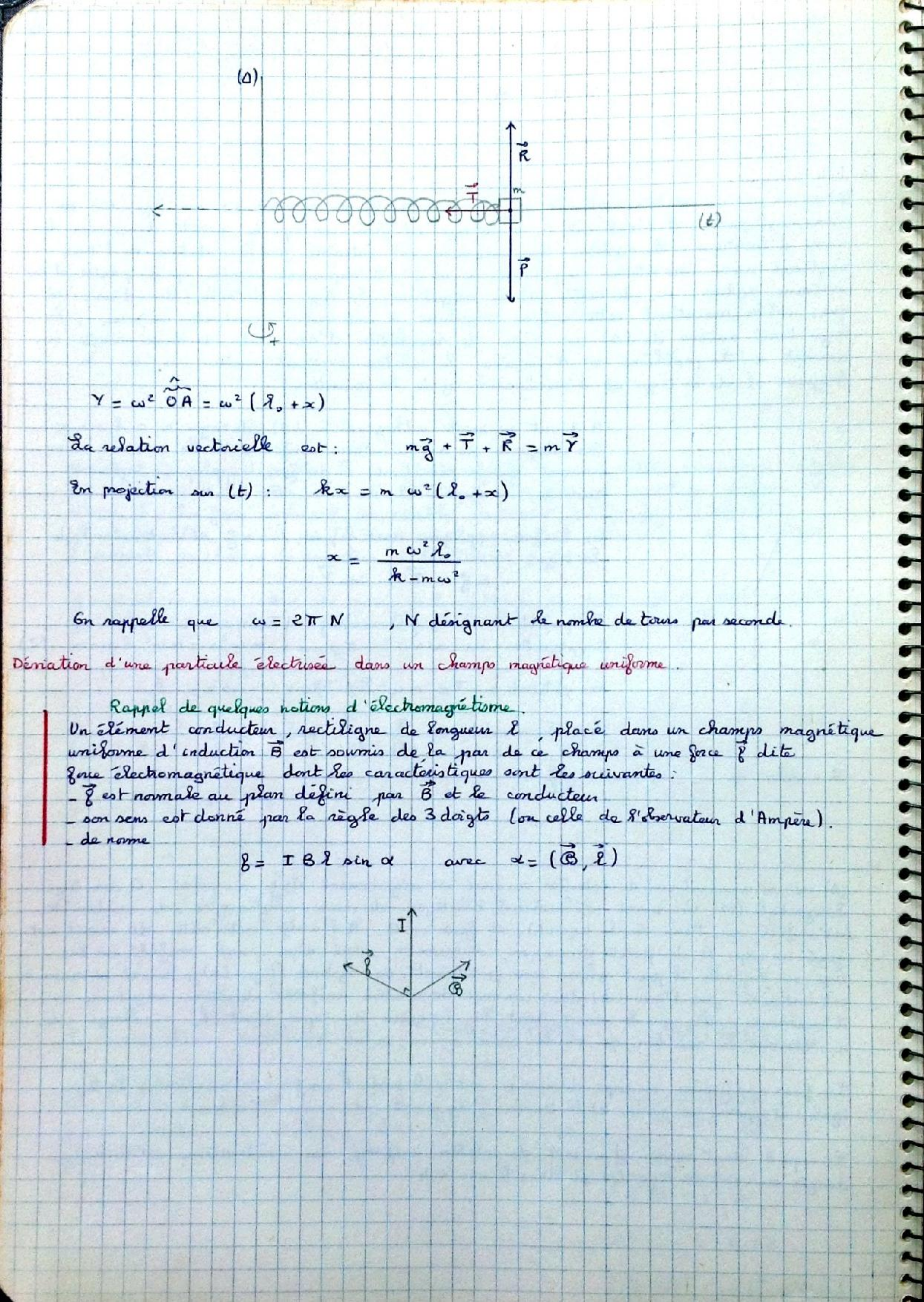
La valeur de ω_0 est $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Mise en évidence de la force centripète

(Δ) est un axe vertical de rotation auquel est rigidement liée au point O une tige horizontale (t). Un ressort hélicoïdal élastique de masse négligeable, de raideur k, est enfilé sur l'axe de la tige (t), et fixé en O. A l'autre extrémité du ressort est fixé un corps A de petite dimension, de masse m, percé d'un canal, enfilé sur la tige sur laquelle il peut glisser sans frottement. Le système tige (t), ressort et masse m est entraîné par l'axe (Δ) dans un mvt de rotation uniforme de vitesse angulaire ω. L'expérience montre que le ressort dont la longueur au repos était ℓ_0 s'allonge de x. Etablir la relation qui existe entre x, ω, m et k.

Les forces appliquées au corps de masse m sont : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction de la tige égale et opposée au poids, et la tension $\vec{T}$ du ressort, de norme $T = kx$

Le corps A étant animé d'un mvt de rotation uniforme, son accélération est radiale, dirigée suivant la tige (t) et dans le sens OA.



$$\gamma = \omega^2 \widehat{OA} = \omega^2 (l_0 + x)$$

La relation vectorielle est : $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$

En projection sur (t) : $kx = m\,\omega^2 (l_0 + x)$

$$x = \frac{m\,\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}$$

On rappelle que $\omega = 2\pi N$, N désignant le nombre de tours par seconde.

Déviation d'une particule électrisée dans un champ magnétique uniforme.

Rappel de quelques notions d'électromagnétisme.

Un élément conducteur, rectiligne de longueur l, placé dans un champs magnétique uniforme d'induction $\vec{B}$ est soumis de la part de ce champs à une force $\vec{f}$ dite force électromagnétique dont les caractéristiques sont les suivantes :

- $\vec{f}$ est normale au plan défini par $\vec{B}$ et le conducteur
- son sens est donné par la règle des 3 doigts (ou celle de l'observateur d'Ampère).
- de norme

$$f = I B l \sin\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = (\vec{B}, \vec{l})$$

Action d'un champs magnétique uniforme sur une particule animée d'une vitesse v.

Pendant l'intervalle de temps dt, la particule subit un déplacement $dl = v\,dt$ ce qui équivaut à un élément conducteur de longueur dl parcouru par un courant d'intensité $i = \frac{q}{dt}$ dans le sens de $\vec{v}$ si la charge est positive, dans le sens contraire si la charge est négative.

Si le vecteur $\vec{B}$ est normal au vecteur $\vec{v}$, la force électromagnétique f est normale au plan défini par les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{v}$, et son sens est donné par la règle précédente :

$$f = B\, i\, dl = B \frac{|q|}{dt} v.\,dt \qquad \left(\text{car} \quad i = \frac{q}{dt} \right)$$

$\vec{f}$, $\vec{B}$, i, $\vec{v}$ — $q > 0$

$\vec{B}$, i, $\vec{v}$, $\vec{f}$ — $q < 0$

$\vec{B} \otimes$

Étude de la trajectoire de la particule qui pénètre dans le champs magnétique uniforme avec un vecteur vitesse v_0 normal à l'induction magnétique.

$\vec{v_0}$, $\vec{B}$ $\odot$, r, O

La figure est faite en supposant la charge q positive.
Le vecteur induction $\vec{B}$ constant dans le carré ABCD est supposé normal au plan du carré et dirigé d'arrière à l'avant. Dès l'instant où la particule pénètre dans le champs, elle sera soumise à une force de norme constante $f = B q v_0$ constamment normale à son vecteur vitesse $\vec{v}$. Le mvt de la particule dans ce champs magnétique sera circulaire uniforme de vitesse v_0 :

$$f = m \frac{v_0^2}{r} = B q v_0$$

Spectromètre à simple focalisation

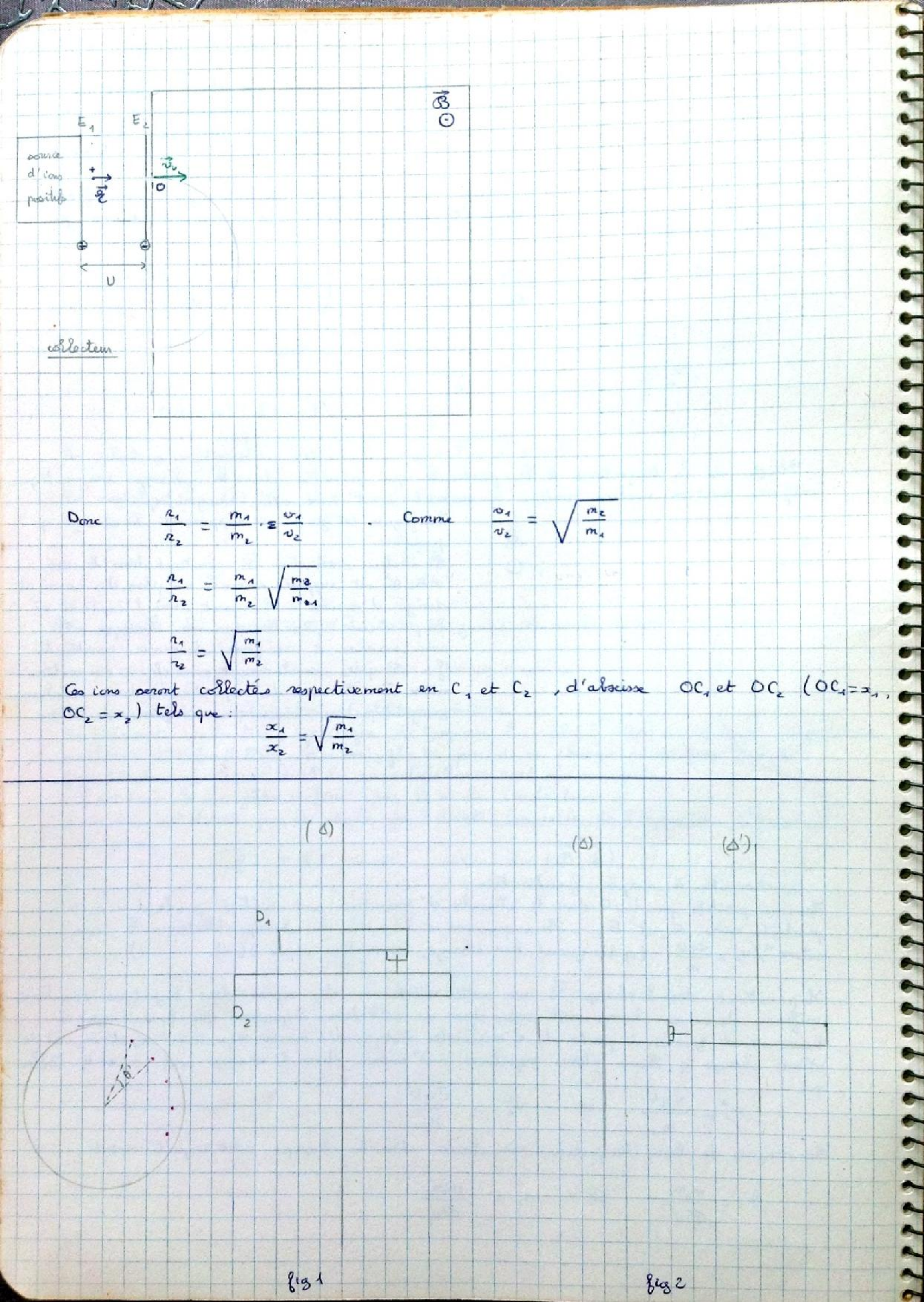
Les ions positifs produits dans la chambre d'ionisation sont accéléré par la d.d.p. U produite entre E_1 et E_2. Ils acquièrent à la sortie du champs électrique $\vec{E}$, une vitesse v_0/$v_0^2 = \frac{2qU}{m}$ (q désignant leur charge, et m leur masse) (f)

Ils pénètrent dans le champs $\vec{B}$ avec cette vitesse v_0 et, après leur trajectoire circulaire uniforme dans ce champs sont reçus dans un collecteur. Supposons que les ions reçus en haut soient formés à partir de 2 nucléides isotopes de masses respectives m_1 et m_2 et de même charge q. Leurs vitesses respectives à l'entrée dans le champs sont v_1 et v_2 telles que :

$$v_1^2 = \frac{2qU}{m_1} \quad \text{et} \quad v_2^2 = \frac{2qU}{m_2}$$

Les rayons de leurs trajectoires circulaires dans le champs sont respectivement :

$$r_1 = \frac{m_1 v_1}{Bq} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{m_2 v_2}{Bq}$$



Donc $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{v_1}{v_2}$. Comme $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

Ces ions seront collectés respectivement en C_1 et C_2 , d'abscisse OC_1 et OC_2 ($OC_1 = x_1$, $OC_2 = x_2$) tels que :

$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

---

fig 1

fig 2

Introduction expérimentale à la notion de moment d'inertie

On dispose de 2 disques pleins et homogènes D_1 et D_2. Ces 2 disques sont mobiles autour du même axe vertical (de rotation). Cet axe étant confondu avec leur axe de symétrie. Chacun des disques porte un ergot, ce qui permet de réaliser un choc entre les 2 disques (cf. fig 1)

On peut concevoir un autre montage dans lequel les disques D_1 et D_2 seraient mobiles autour de 2 axes verticaux (Δ) et (Δ') différents, chaque disque étant encore munis d'un ergot (cf. fig 2).

Chaque disque est porteur d'une microlampe au néon, et son mvt de rotation est enregistré par la méthode néocinégraphique. La trajectoire de la microlampe s'inscrit sur le cliché sous forme d'une ligne ponctuée circulaire, de laquelle on déduit aisément la vitesse angulaire de rotation du disque. On peut donc réaliser un choc entre les 2 disques (choc élastique ou non), déterminer les vitesses angulaires ω_1 et ω_2 des disques D_1 et D_2 immédiatement avant le choc, et leurs vitesses angulaires ω'_1 et ω'_2 immédiatement après le choc. On forme ensuite les rapports : $\frac{\omega'_2-\omega_2}{\omega'_1-\omega_1}$. Dans une série d'expériences que l'on peut réaliser en faisant varier les conditions du choc, on trouve toujours que ce rapport est un invariant négatif. On écrit :

$$\frac{\omega'_2-\omega_2}{\omega'_1-\omega_1} = -K \qquad K = \text{constante positive.}$$

On est ainsi conduit pour traduire les résultats de ces expériences à introduire une nouvelle grandeur physique que l'on représente habituellement par la lettre J et que l'on désigne par le terme "moment d'inertie". Cette grandeur peut être introduite en posant que la valeur absolue K de l'invariant est égale au rapport des moments d'inertie J_1 et J_2 des disques D_1 et D_2.

J_1 caractérise l'aptitude que possède le disque D_1 à modifier lors d'une interaction de choc avec D_2 la vitesse angulaire du disque D_2. J_1 caractérise aussi la résistance, l'inertie qu'oppose le disque D_1 à la modification de sa propre vitesse angulaire lors de l'interaction de choc avec D_2.

$$\frac{\omega'_2-\omega_2}{\omega'_1-\omega_1} = -\frac{J_1}{J_2}$$

Ce qui précède nous montre que le "moment d'inertie" est une ~~masse~~ grandeur mesurable. Expérimentalement, on peut montrer que le mmt d.i relatif à un axe (Δ) d'un élément matériel ponctuel de masse m situé à la distance r de l'axe (Δ) est proportionnelle à la masse d'inertie m de cet élément, et au carré de la distance de cet élément à l'axe (Δ), c'est-à-dire proportionnel au produit mr^2. Le coefficient de proportionalité peut-être pris égal à 1, et le produit mr^2 peut alors représenter le moment d'inertie de cet élément matériel par rapport à (Δ).

Envisageons un système de pts matériels de m.d.i respectifs $m_1, m_2, \dots, m_i$ et dont les distances respectives à un axe (Δ) sont $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_i$. Le moment d'inertie relatif à l'axe (Δ) de ce système matériel peut s'exprimer par

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

L'unité de J dans le système S.I est le $kg.m^2$

Quelques exemples de calcul de moment d'inertie.

Moment d'inertie d'une jante mince d'épaisseur négligeable.

L'axe (Δ) étant l'axe orthogonal à la jante et passant par son centre. Tous les éléments matériels de la jante sont à une distance r du centre O.

$$J_\Delta = r^2 \sum m_i = m r^2 \quad (m : \text{masse de la jante}).$$

r

O O(Δ)

$$\boxed{J_\Delta = m r^2}$$

Évidemment, on retrouve la même expression pour le moment d'inertie d'un cylindre creux par rapport à son axe de révolution (Δ).

Moment d'inertie d'une tige homogène de section constante de masse m, de longueur ℓ par rapport à l'axe (Δ) perpendiculaire à la tige en l'une de ses extrémités.

Désignons par $x'Ox$ l'axe support de la tige orienté positivement de O vers A. Désignons par μ la masse par unité de longueur de la tige (masse linéique).

x'

(Δ) O

ℓ

A

x

Soit un élément de longueur infiniment petite dx entre les points d'abscisse x et $x + dx$. La masse de cet élément est $dm = \mu\, dx$

Le moment d'inertie de cet élément par rapport à l'axe (Δ) est :

$dJ = x^2 dm = \mu x^2 dx$.

Le moment d'inertie de la tige s'exprimera par l'intégrale définie :

$$J = \int_0^\ell \mu x^2 dx = \left[\mu \frac{x^3}{3} \right]_0^\ell$$

$$J = \mu \frac{\ell^3}{3}$$

La masse de la tige étant $m = \mu \ell$, il vient $\boxed{J_\Delta = \frac{1}{3} m \ell^2}$

Moment d'inertie d'une tige cylindrique homogène de longueur ℓ par rapport à l'axe (Δ') perpendiculaire à la tige en son milieu O.

x

A

Sur l'axe $x'x$ support de la tige, les extrémités A et B de celle-ci ont pour abscisse respective $+\frac{\ell}{2}$ et $-\frac{\ell}{2}$. Le moment d'inertie élémentaire a pour expression :

$$dJ = \mu x^2 dx$$

(Δ')

O

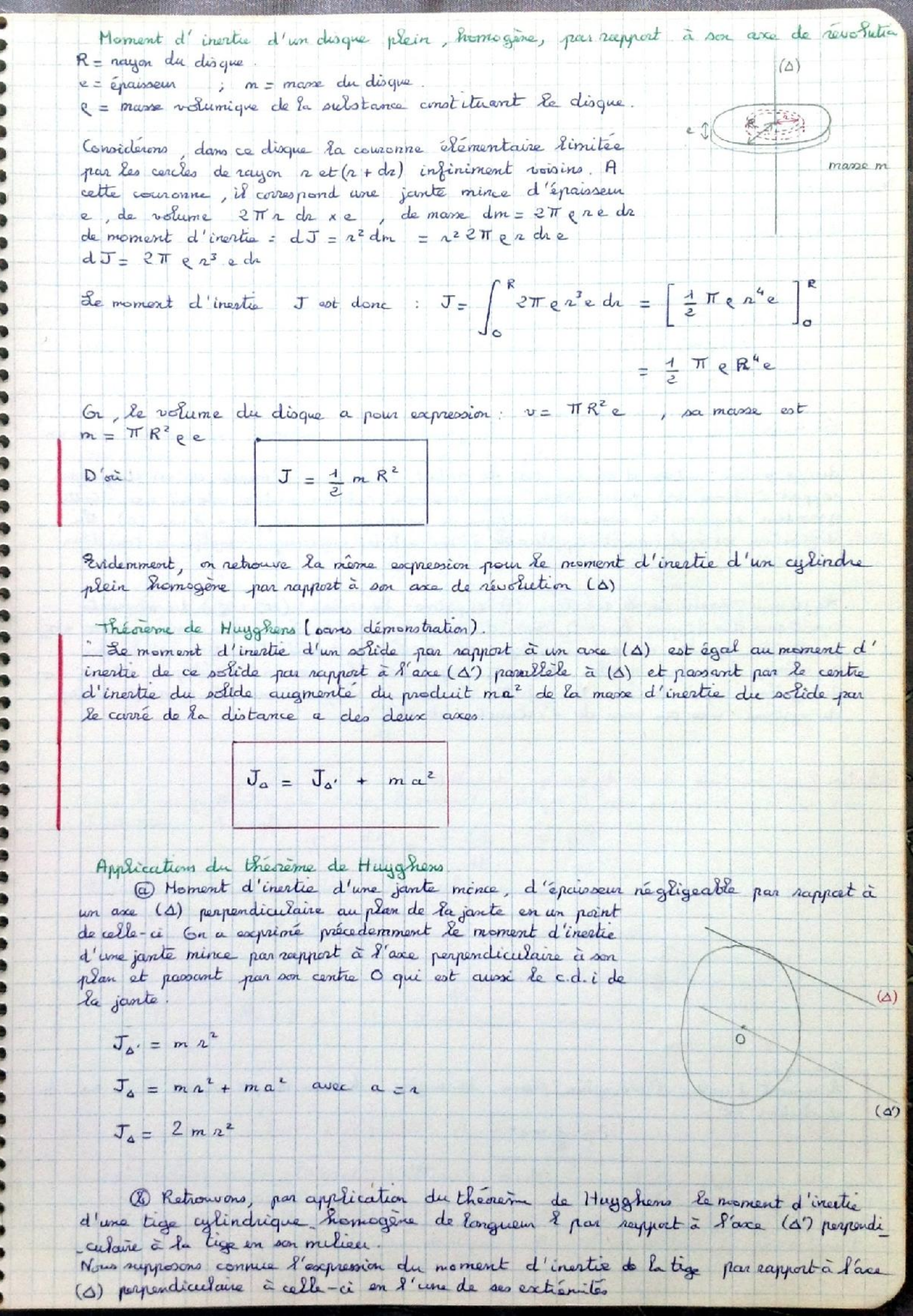
Ici, $$J = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \mu x^2 dx = \left[\frac{1}{3} \mu x^3\right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \mu \frac{\ell^3}{8} = \frac{1}{12} \mu \ell^3$$

B

x'

$$\boxed{J_{\Delta'} = \frac{1}{12} m \ell^2}$$



Moment d'inertie d'un disque plein, homogène, par rapport à son axe de révolution

R = rayon du disque.
e = épaisseur ; m = masse du disque.
ρ = masse volumique de la substance constituant le disque.

Considérons, dans ce disque la couronne élémentaire limitée par les cercles de rayon r et $(r + dr)$ infiniment voisins. A cette couronne, il correspond une jante mince d'épaisseur e, de volume $2\pi r\, dr \times e$, de masse $dm = 2\pi \rho r e\, dr$ de moment d'inertie : $dJ = r^2 dm = r^2 2\pi \rho r\, dr\, e$

$dJ = 2\pi \rho r^3 e\, dr$

Le moment d'inertie J est donc : $J = \int_0^R 2\pi \rho r^3 e\, dr = \left[\frac{1}{2} \pi \rho r^4 e \right]_0^R$

$$= \frac{1}{2} \pi \rho R^4 e$$

Or, le volume du disque a pour expression : $v = \pi R^2 e$, sa masse est $m = \pi R^2 \rho e$

D'où

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

Evidemment, on retrouve la même expression pour le moment d'inertie d'un cylindre plein homogène par rapport à son axe de révolution (Δ)

Théorème de Huyghens (sans démonstration).

_ Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe (Δ) est égal au moment d'inertie de ce solide par rapport à l'axe (Δ') parallèle à (Δ) et passant par le centre d'inertie du solide augmenté du produit ma^2 de la masse d'inertie du solide par le carré de la distance a des deux axes.

$$J_\Delta = J_{\Delta'} + m a^2$$

Application du théorème de Huyghens

ⓐ Moment d'inertie d'une jante mince, d'épaisseur négligeable par rapport à un axe (Δ) perpendiculaire au plan de la jante en un point de celle-ci. On a exprimé précédemment le moment d'inertie d'une jante mince par rapport à l'axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre O qui est aussi le c.d.i de la jante.

$J_{\Delta'} = m r^2$

$J_\Delta = m r^2 + m a^2$ avec $a = r$

$J_\Delta = 2 m r^2$

ⓑ Retrouvons, par application du théorème de Huyghens le moment d'inertie d'une tige cylindrique homogène de longueur l par rapport à l'axe (Δ') perpendiculaire à la tige en son milieu.
Nous supposons connue l'expression du moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Δ) perpendiculaire à celle-ci en l'une de ses extrémités

$$J_\Delta = \frac{1}{3} m \ell^2$$

Or, $J_\Delta = J_{\Delta'} + m \frac{\ell^2}{4}$ donc $J_{\Delta'} = \frac{1}{3} m \ell^2 - \frac{1}{4} m \ell^2$

$$J_{\Delta'} = \frac{1}{12} m \ell^2$$

Notion de moment cinétique

Reprenons la relation écrite plus haut à propos des interactions de choc entre deux disques mobiles autour d'un même axe vertical :

$$\frac{\omega'_2 - \omega_2}{\omega'_1 - \omega_1} = - \frac{J_1}{J_2}$$ ce qui peut s'écrire :

$$- J_1 \omega'_1 + J_1 \omega_1 = J_2 \omega'_2 - J_2 \omega_2$$

$$J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 = J_1 \omega'_1 + J_2 \omega'_2 \qquad (1)$$

On convient de poser $\boxed{\sigma = J\omega}$. La grandeur ainsi définie représentant pour un disque mobile autour d'un axe (Δ) le produit du moment d'inertie de ce disque par rapport à l'axe (Δ) par la vitesse angulaire de rotation autour de cet axe. Cette grandeur exprime le moment cinétique de ce disque par rapport à l'axe (Δ). La définition est évidemment applicable à un solide quelconque mobile autour d'un axe (Δ).

Le premier membre de la relation (1) exprime la somme $(\sigma_1 + \sigma_2)$ des moments cinétiques des disques D_1 et D_2 immédiatement avant le choc. Leur somme $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ peut être appelée moment cinétique du système immédiatement avant le choc. De même, le second membre $\sigma'_1 + \sigma'_2$ représente le moment cinétique $\sigma' = \sigma'_1 + \sigma'_2$ du système après le choc. La relation (1) traduit l'invariance du moment cinétique du système ~~inv~~ au cours de l'interaction de choc.

Relation fondamentale de la dynamique de rotation

Remarque :

Le moment d'inertie d'une sphère pleine, homogène, de masse m par rapport à un axe de révolution est :

$$\boxed{J = \frac{2}{5} m r^2}$$

Loi d'inertie

On retrouve à propos des mvts de rotation la loi d'inertie déjà énoncée à propos des mvts de translation. On peut envisager un solide mobile autour d'un axe (Δ) passant par son c.d.i. On peut imaginer le cas idéal où les frottements de toute nature étant rendus négligeables ; une impulsion initiale serait donnée à ce solide, l'enregistrement néoncinégraphique de son mvt révèlerait que celui-ci est de rotation uniforme, c'est-à-dire que sa vitesse angulaire ω, et par suite son moment cinétique $\sigma = J\omega$ est invariant. On peut ainsi parvenir à l'énoncé d'une loi d'inertie exprimant l'invariance du moment cinétique d'un solide qui n'est soumis à aucune action extérieure. Nous admettrons ici la généralisation de cette loi d'invariance pour le cas d'un système matériel quelconque.

" Le moment cinétique d'un système isolé est invariant".

Notion de couple

Si l'on observe que le moment cinétique σ d'un système matériel varie avec la date, on traduit cette observation en disant que ce système a été soumis à une action extérieure, et on peut convenir d'appeler "couple" cette action extérieure.

On peut alors proposer une définition quantitative de cette notion : supposons qu'entre 2 dates t et $t+\Delta t$ le moment cinétique d'un système matériel en rotation autour d'un axe passe de la valeur σ à la valeur $\sigma + \Delta\sigma$, nous appelerons "couple moyen" appliqué au système entre ces 2 dates la grandeur définie par le rapport $\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$. Quand $\Delta t \to 0$ ce rapport a pour limite la dérivée $\frac{d\sigma}{dt}$. Cette dérivée exprime le couple appliqué au système à la date t.

$$\Gamma = \frac{d\sigma}{dt}$$

Dans le cas particulier du solide, le moment cinétique a pour expression $\sigma = J\omega$ avec J constant. Il vient

$$\Gamma = \frac{d\sigma}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Le couple appliqué à la date t à un solide en rotation autour d'un axe a donc pour expression :

$$\Gamma = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

J = moment d'inertie

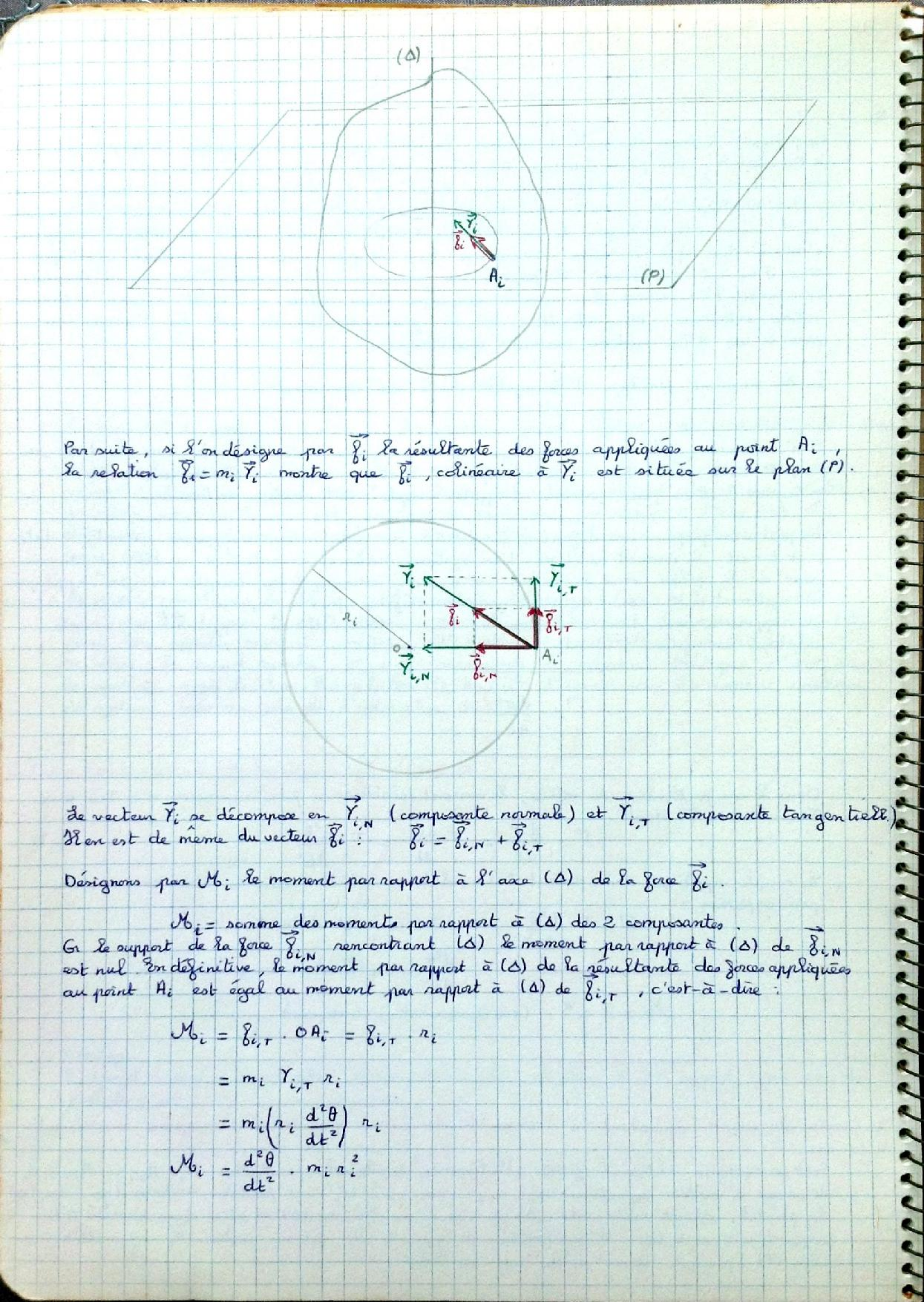
$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ = accélération angulaire = α''

$$\mathcal{M} = J\alpha''$$

(voir démonstration ci-dessous)

Expression du couple équivalent à l'ensemble des forces agissant sur un système mobile autour d'un axe

Soit un système matériel formé d'éléments matériels ponctuels $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_n$ de masses d'inerties respectives $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ et mobile autour d'un axe (Δ). Le point A_i décrit autour de (Δ) un cercle centré sur (Δ) et situé dans un plan (P) perpendiculaire à (Δ). L'accélération de ce point A_i est un vecteur $\vec{\gamma}_i$ appartenant au plan (P) (puisque le mvt de A_i est circulaire).



Par suite, si l'on désigne par $\vec{f}_i$ la résultante des forces appliquées au point A_i, la relation $\vec{f}_i = m_i \vec{\gamma}_i$ montre que $\vec{f}_i$, colinéaire à $\vec{\gamma}_i$ est située sur le plan (P).

Le vecteur $\vec{\gamma}_i$ se décompose en $\vec{\gamma}_{i,N}$ (composante normale) et $\vec{\gamma}_{i,T}$ (composante tangentielle). Il en est de même du vecteur $\vec{f}_i$: $\vec{f}_i = \vec{f}_{i,N} + \vec{f}_{i,T}$

Désignons par $\mathcal{M}_i$ le moment par rapport à l'axe (Δ) de la force $\vec{f}_i$.

$\mathcal{M}_i$ = somme des moments par rapport à (Δ) des 2 composantes. Or le support de la force $\vec{f}_{i,N}$ rencontrant (Δ) le moment par rapport à (Δ) de $\vec{f}_{i,N}$ est nul. En définitive, le moment par rapport à (Δ) de la résultante des forces appliquées au point A_i est égal au moment par rapport à (Δ) de $\vec{f}_{i,T}$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{M}_i = f_{i,T} \cdot OA_i = f_{i,T} \cdot r_i$$

$$= m_i \, \gamma_{i,T} \, r_i$$

$$= m_i \left(r_i \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) r_i$$

$$\mathcal{M}_i = \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot m_i r_i^2$$

On peut écrire une relation analogue pour tous les points du solide et exprimer ainsi le moment résultant par rapport à l'axe (Δ) de toutes les forces appliquées au système :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \dots + \mathcal{M}_i + \dots + \mathcal{M}_n$$

$$\mathcal{M} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad \text{donc} \qquad \mathcal{M} = J\,\alpha'' = \frac{d\sigma}{dt} \qquad \text{avec } \alpha'' = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Or nous avons exprimé le couple appliqué au système par la dérivée par rapport à t du moment cinétique. L'expression qui vient d'être obtenue nous montre que l'ensemble des forces appliquées au système est équivalent à un couple, couple dont le moment relatif à (Δ) est égal au moment par rapport à (Δ) de toutes les forces appliquées au système. Or, nous avons vu que les forces intérieures à un système matériel sont 2 à 2 opposées, d'où il résulte que le moment résultant par rapport à (Δ) des forces intérieures au système est nul. En définitive, le couple équivalent à un système matériel en rotation autour d'un axe (Δ) est égal au moment résultant par rapport à l'axe (Δ) des forces extérieures appliquées au système.

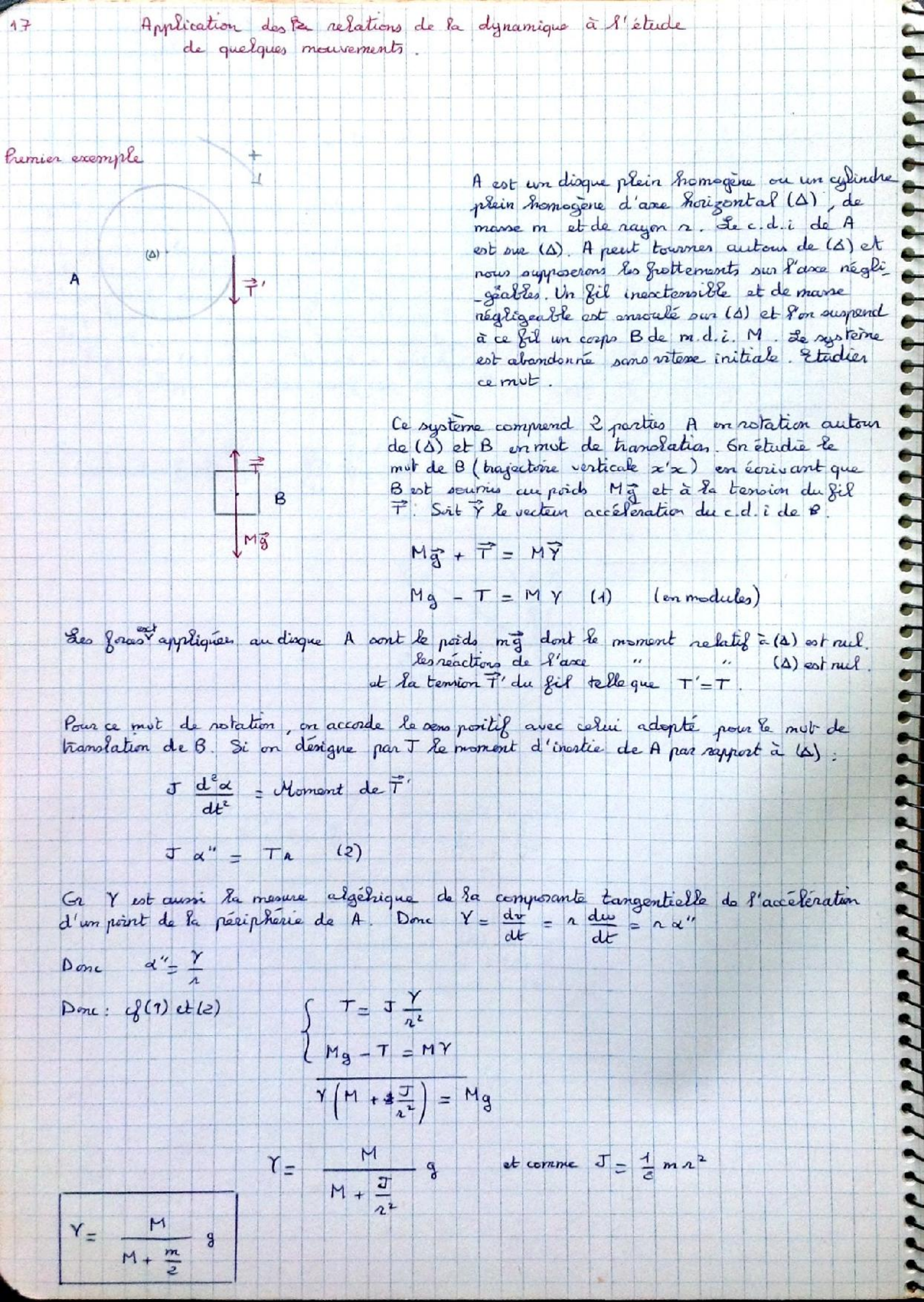
$$\frac{d\sigma}{dt} = \mathcal{M}_{(\Delta)} \text{ (forces extérieures)}$$

Et pour le cas particulier du solide : $J \dfrac{d\omega}{dt} = J \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \mathcal{M}_{(\Delta)}$ (forces extérieures)

$$\boxed{\mathcal{M} = J\,\alpha''}$$

Application des relations de la dynamique à l'étude de quelques mouvements.

Premier exemple



A est un disque plein homogène ou un cylindre plein homogène d'axe horizontal (Δ), de masse m et de rayon r. Le c.d.i de A est sur (Δ). A peut tourner autour de (Δ) et nous supposerons les frottements sur l'axe négligeables. Un fil inextensible et de masse négligeable est enroulé sur (Δ) et l'on suspend à ce fil un corps B de m.d.i. M. Le système est abandonné sans vitesse initiale. Etudier ce mvt.

Ce système comprend 2 parties A en rotation autour de (Δ) et B en mvt de translation. On étudie le mvt de B (trajectoire verticale x'x) en écrivant que B est soumis au poids $M\vec{g}$ et à la tension du fil $\vec{T}$. Soit $\vec{\gamma}$ le vecteur accélération du c.d.i de B.

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{\gamma}$$

$$Mg - T = M\gamma \quad (1) \quad \text{(en modules)}$$

Les forces ext appliquées au disque A sont le poids $m\vec{g}$ dont le moment relatif à (Δ) est nul.
les réactions de l'axe " " (Δ) est nul.
et la tension $\vec{T}'$ du fil telle que $T' = T$.

Pour ce mvt de rotation, on accorde le sens positif avec celui adopté pour le mvt de translation de B. Si on désigne par J le moment d'inertie de A par rapport à (Δ) :

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \text{Moment de } \vec{T}'$$

$$J\alpha'' = Tr \quad (2)$$

Or γ est aussi la mesure algébrique de la composante tangentielle de l'accélération d'un point de la périphérie de A. Donc $\gamma = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha''$

Donc $\alpha'' = \frac{\gamma}{r}$

Donc : cf (1) et (2)

$$\begin{cases} T = J\frac{\gamma}{r^2} \\ Mg - T = M\gamma \end{cases}$$

$$\gamma\left(M + \frac{J}{r^2}\right) = Mg$$

$$\gamma = \frac{M}{M + \frac{J}{r^2}}\,g \qquad \text{et comme } J = \frac{1}{2}mr^2$$

$$\boxed{\gamma = \frac{M}{M + \frac{m}{2}}\,g}$$



Second exemple : Machine d'Atwood.

Toutes les précisions apportées dans le précédent énoncé, sont implicitement contenues dans celui-ci.
Nous supposerons par exemple $M_1 > M_2$. Le système est abandonné sans vitesse initiale.

Mvt de translation du c.d.i de B :

$$M_1\vec{g} + \vec{T_1} = M_1\vec{\gamma}$$

$$M_1 g - T_1 = M_1 \gamma \qquad (1)$$

Mvt de translation du c.d.i de C :
De même, il vient : $T_2 - M_2 g = M_2 \gamma \qquad (2)$

Mvt de rotation de A :
Les forces appliquées sont le poids $m\vec{g}$ dont le moment par rapport à (Δ) est nul, les réactions de l'axe dont le moment par rapport à (Δ) est nul, les tensions $\vec{T}'_1$ et $\vec{T}'_2$ des 2 brins de fil avec $\|\vec{T}'_1\| = \|\vec{T}_1\| = T_1$ et $T'_2 = T_2 = T_2$
Soit J le moment d'inertie de A relatif à (Δ) et par $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha''$ l'accélération angulaire de A, il vient :

$$J\alpha'' = \text{Moment résultant des forces extérieures appliquées au corps A.}$$

$$J\alpha'' = T_1 r - T_2 r$$

$$J\frac{\gamma}{r} = (T_1 - T_2) r \quad \vdash \quad J\frac{\gamma}{r^2} = T_1 - T_2 \qquad (3)$$

Conclusion :

$$\begin{cases} M_1 g - T_1 = M_1 \gamma \\ T_2 - M_2 g = M_2 \gamma \\ T_1 - T_2 = J\frac{\gamma}{r^2} \end{cases}$$

$$(M_1 - M_2) g = \gamma\left(M_1 + M_2 + \frac{J}{r^2}\right) \quad \vdash \quad \gamma = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + \frac{J}{r^2}}\, g$$

et comme $J = \frac{1}{2} m r^2$

$$\boxed{\gamma = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + \frac{m}{r^2}}\, g} \qquad (4)$$

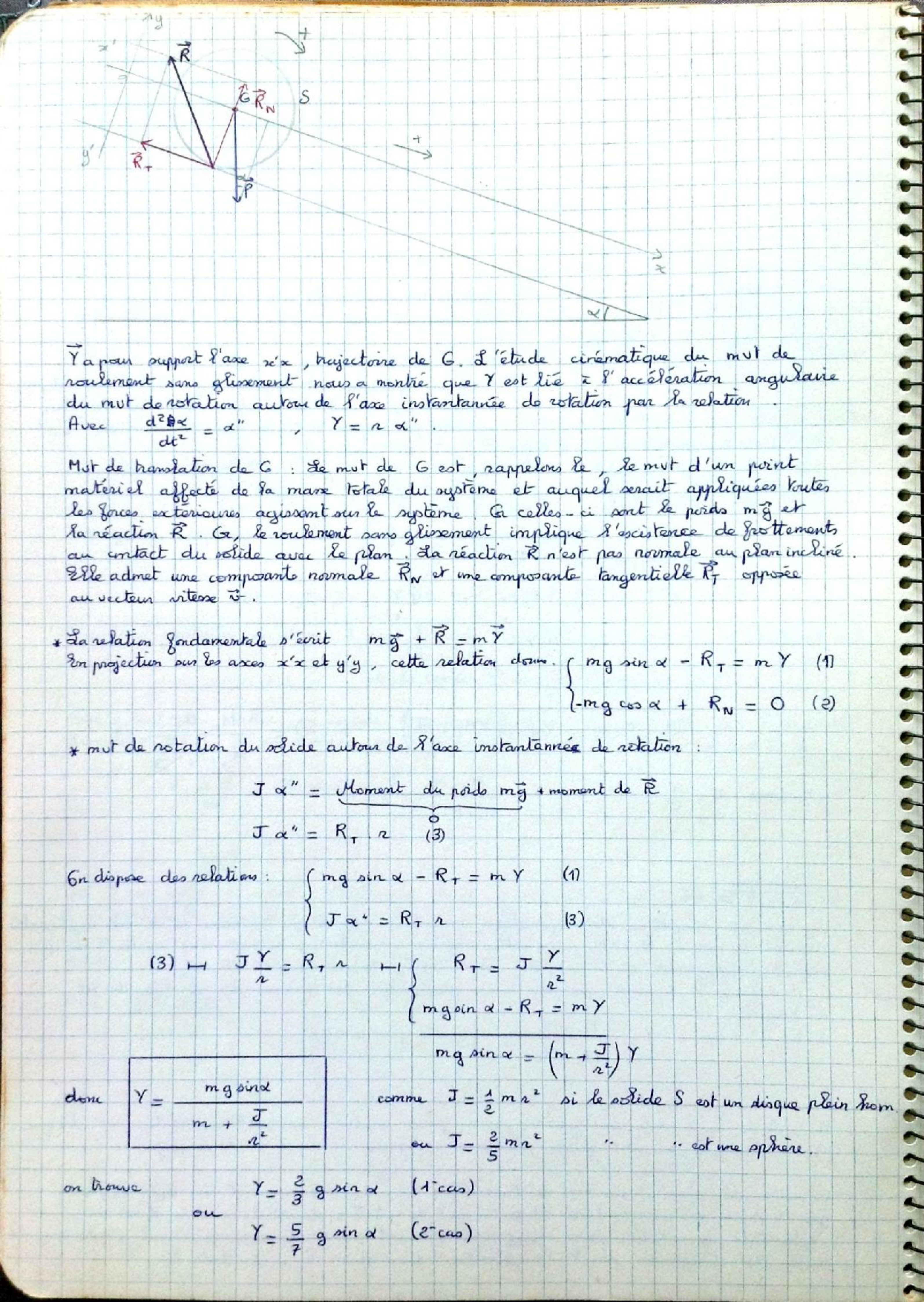
Remarque

Une variante simplifiée de ce problème consiste à supposer que la masse de A est négligeable devant les masses M_1 et M_2. Si cette condition est réalisée, le moment d'inertie J de a est alors négligeable et la relation $J\alpha'' = (T_1 - T_2) r$ devient $T_1 = T_2$.
On pose souvent à priori que dans ce cas particulier les tensions des 2 brins de fil sont égales.
On trouve alors $\gamma = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\, g$ (cf (4) pour $m \simeq 0$)

Roulement sans glissement sur un plan incliné.

Le solide qui roule sans glisser sur un plan incliné est par exemple un disque plein homogène ou une sphère pleine homogène de masse m et de rayon r.

Ce mvt se décompose en un mvt de translation du c.d.i. G suivant une ligne de plus grande pente du plan incliné et en un mvt de rotation du solide autour d'un axe instantané de rotation, axe horizontal passant par G et perpendiculaire à la trajectoire de G. Nous désignerons par γ l'accélération du c.d.i G à la date t.



$\vec{\gamma}$ a pour support l'axe x'x, trajectoire de G. L'étude cinématique du mvt de roulement sans glissement nous a montré que γ est lié à l'accélération angulaire du mvt de rotation autour de l'axe instantanée de rotation par la relation.

Avec $\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''$, $\gamma = r\,\alpha''$.

Mvt de translation de G : Le mvt de G est, rappelons le, le mvt d'un point matériel affecté de la masse totale du système et auquel serait appliquées toutes les forces extérieures agissant sur le système. Or celles-ci sont le poids $m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$. Or, le roulement sans glissement implique l'existence de frottements au contact du solide avec le plan. La réaction $\vec{R}$ n'est pas normale au plan incliné. Elle admet une composante normale $\vec{R}_N$ et une composante tangentielle $\vec{R}_T$ opposée au vecteur vitesse $\vec{v}$.

* La relation fondamentale s'écrit $m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$

En projection sur les axes x'x et y'y, cette relation donne

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - R_T = m\gamma & (1) \\ -mg\cos\alpha + R_N = 0 & (2) \end{cases}$$

* mvt de rotation du solide autour de l'axe instantanée de rotation :

$$J\,\alpha'' = \underbrace{\text{Moment du poids } m\vec{g}}_{0} + \text{moment de } \vec{R}$$

$$J\,\alpha'' = R_T\,r \quad (3)$$

On dispose des relations :

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - R_T = m\gamma & (1) \\ J\,\alpha'' = R_T\,r & (3) \end{cases}$$

$$(3) \mapsto J\frac{\gamma}{r} = R_T\,r \mapsto \begin{cases} R_T = J\dfrac{\gamma}{r^2} \\ mg\sin\alpha - R_T = m\gamma \end{cases}$$

$$mg\sin\alpha = \left(m + \frac{J}{r^2}\right)\gamma$$

donc $$\boxed{\gamma = \frac{mg\sin\alpha}{m + \dfrac{J}{r^2}}}$$

comme $J = \frac{1}{2}mr^2$ si le solide S est un disque plein hom.

ou $J = \frac{2}{5}mr^2$ " " est une sphère.

on trouve $\gamma = \frac{2}{3}\,g\sin\alpha$ (1er cas)

ou

$\gamma = \frac{5}{7}\,g\sin\alpha$ (2e cas)

Définition

Un solide S est animé autour d'un axe (Δ) d'un mvt sinusoïdal de rotation si l'élongation angulaire α à la date t est une fonction sinusoïdale de la date. La fonction horaire d'un tel mvt s'écrira, par exemple : $\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi)$

Les valeurs extrêmes de l'élongation sont α_m et $-\alpha_m$. α_m est appelée amplitude du mouvement. La grandeur ω exprime la pulsation du mvt. Cette pulsation est liée à la période T du mvt et à sa fréquence N par la relation :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N}$$

La grandeur $\omega t + \varphi$ est la phase à la date t. φ est la phase initiale (pour $t = 0$)

Expression du couple responsable d'un tel mvt

Désignons par J le moment d'inertie du solide relatif à l'axe (Δ). Le couple appliqué au solide s'exprime par la relation : $\Gamma = J\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ où $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''$ exprime l'accélération angulaire. On obtient, par 2 dérivations successives de la fonction horaire $\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi)$:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = +\alpha_m \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega^2 \alpha$$

Le couple appliqué est $\Gamma = -J\omega^2\alpha$ ou $\Gamma = -K\alpha$ en posant $K = J\omega^2$

" Si un solide est animé autour d'un axe fixe d'un mvt sinusoïdal de rotation, le couple appliqué à ce solide est à chaque instant proportionnel à l'élongation angulaire et de signe opposé à celui de l'élongation angulaire."

Réciproquement, supposons qu'un solide mobile autour d'un axe (Δ) soit à chaque instant soumis à un couple de signe opposé à celui de l'élongation angulaire et proportionnel à cette élongation, ce que l'on peut exprimer par la relation $\Gamma = -K\alpha$.
La relation fondamentale du solide en rotation $\Gamma = J\alpha''$ nous donne en explicitant Γ : $J\alpha'' = -K\alpha \vdash \alpha'' + \frac{K}{J}\alpha = 0$ (1)

Posons $\omega^2 = \frac{K}{J}$ (>0)

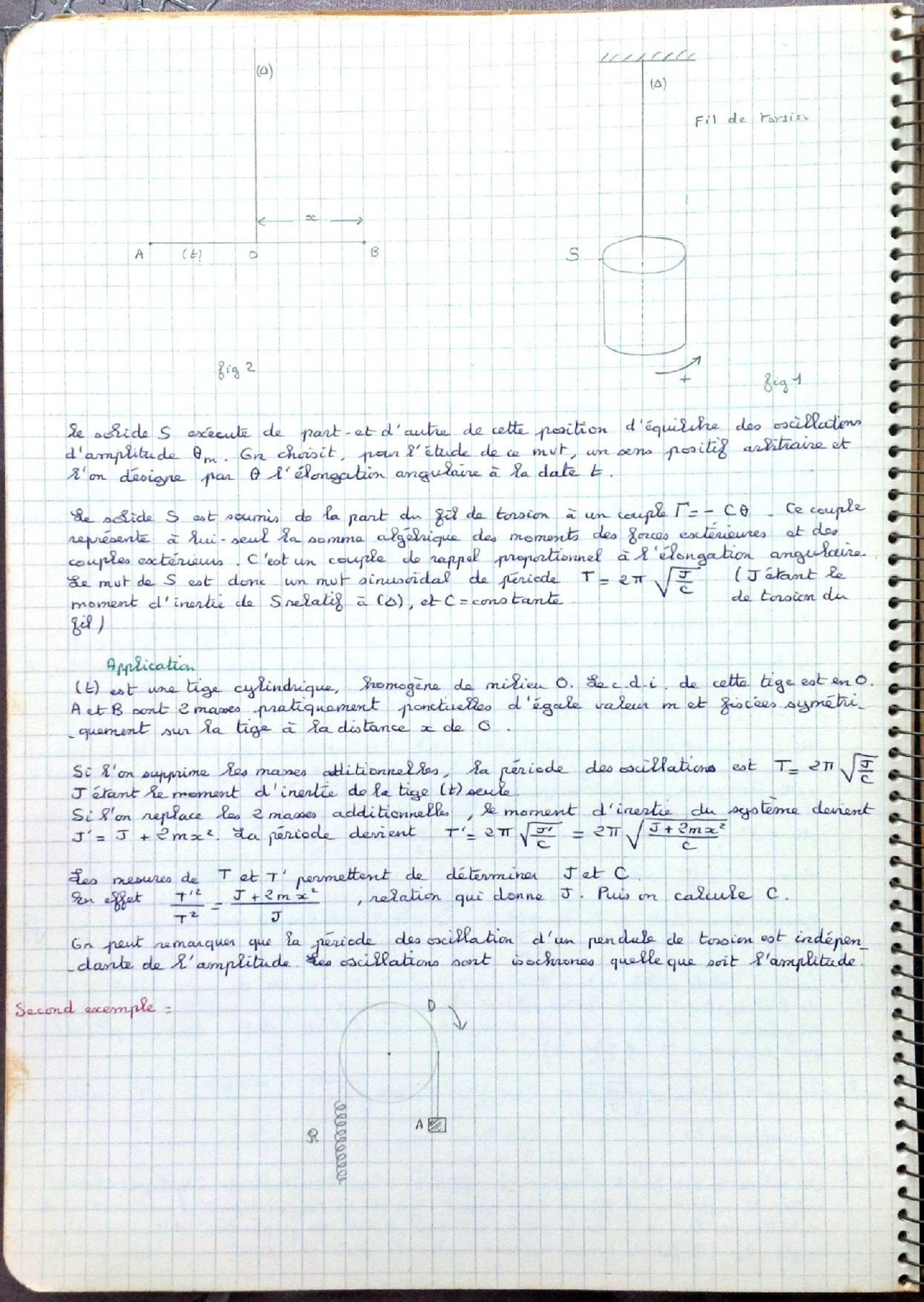
L'équation différentielle (1) admet une solution qui est fonction sinusoïdale de la variable t. Ce mvt de rotation est donc sinusoïdal. $\omega = \sqrt{\frac{K}{J}}$ en est la pulsation. $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K}}$ en est la période.

" Si un solide mobile autour d'un axe est soumis à un couple de signe opposé à celui de l'élongation (couple de rappel) à chaque instant proportionnel à l'élongation angulaire, ce solide est animé d'un mvt sinusoïdal de rotation dont la période a pour expression T (cf formules)".

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{J}}} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K}}}$$

Etude d'un premier exemple : pendule de torsion

Un solide S est fixé à l'extrémité inférieure d'un fil métallique élastique dont l'extrémité supérieure est fixée à un support. Le fil de torsion définit l'axe vertical de rotation et le c.d.i de S est sur cet axe. Ecarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_m (le fil de torsion restant vertical) puis abandonné sans vitesse initiale,



Le solide S exécute de part et d'autre de cette position d'équilibre des oscillations d'amplitude θ_m. On choisit, pour l'étude de ce mvt, un sens positif arbitraire et l'on désigne par θ l'élongation angulaire à la date t.

Le solide S est soumis de la part du fil de torsion à un couple $\Gamma = -C\theta$. Ce couple représente à lui-seul la somme algébrique des moments des forces extérieures et des couples extérieurs. C'est un couple de rappel proportionnel à l'élongation angulaire. Le mvt de S est donc un mvt sinusoïdal de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$ (J étant le moment d'inertie de S relatif à (Δ), et C = constante de torsion du fil)

Application

(t) est une tige cylindrique, homogène de milieu O. Le c.d.i. de cette tige est en O. A et B sont 2 masses pratiquement ponctuelles d'égale valeur m et fixées symétriquement sur la tige à la distance x de O.

Si l'on supprime les masses additionnelles, la période des oscillations est $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$
J étant le moment d'inertie de la tige (t) seule.
Si l'on replace les 2 masses additionnelles, le moment d'inertie du système devient $J' = J + 2mx^2$. La période devient $T' = 2\pi\sqrt{\frac{J'}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{J+2mx^2}{C}}$

Les mesures de T et T' permettent de déterminer J et C.
En effet $\frac{T'^2}{T^2} = \frac{J+2mx^2}{J}$, relation qui donne J. Puis on calcule C.

On peut remarquer que la période des oscillation d'un pendule de torsion est indépendante de l'amplitude. Les oscillations sont isochrones quelle que soit l'amplitude.

Second exemple :

D est une poulie assimilable à un disque plein homogène de masse m et de rayon r.
R est un ressort hélicoïdal élastique de masse négligeable de raideur k.
A est un corps de masse d'inertie M.

A l'équilibre, le c.d.i de A est en G_0 et l'allongement du ressort a pour valeur l.
On écarte A de sa position d'équilibre en le déplaçant verticalement vers le bas d'une petite longueur a puis on abandonne le système sans vitesse initiale.
L'expérience montre que le c.d.i de A exécute de part et d'autre de la position G_0 des oscillations d'amplitude a auxquelles correspondent pour le disque D des oscillation d'amplitude $\theta_m = \frac{a}{r}$.

Etude du mvt

Exprimons la condition d'équilibre de A : ($\vec{T_0}$, G_0, $\vec{P}$)

Le système étant en équilibre, les tensions des 2 brins de fils sont égales et la tension du ressort est égale à T_0. Donc : $T_0 = k l = Mg$ (1)

Orientons la trajectoire de G positivement vers le bas et posons $\overline{G_0G} = x$ = abscisse de G à la date t. Soit γ l'accélération de G à la date t :

(D, +, O, $\vec{T}$, $\vec{T}$, G, $M\vec{g}$)

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{\gamma}$$

$$Mg - T = M\gamma$$

β) La poulie
- les forces appliqués sont : le poids du disque et la réaction de l'axe, forces dont les moments par rapport à l'axe sont nulles.
- les tensions $\vec{T}$ et $\vec{T'}$ des 2 brins de fil.

Lorsque l'abscisse de A est x, l'allongement du ressort est $l + x$ et la tension $\vec{T'}$ a pour norme $T' = k(l+x)$
Nous avons :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Sigma \mathcal{M}$$

avec $\Sigma \mathcal{M} = (T - T')r$

donc $$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = (T - T')r$$

comme $\theta'' = \frac{\gamma}{r}$, $$T - T' = J \frac{\gamma}{r^2} \quad (2)$$

Nous avons donc les relations :
$$\begin{cases} Mg - T = M\gamma \\ T - T' = J \frac{\gamma}{r^2} \end{cases}$$

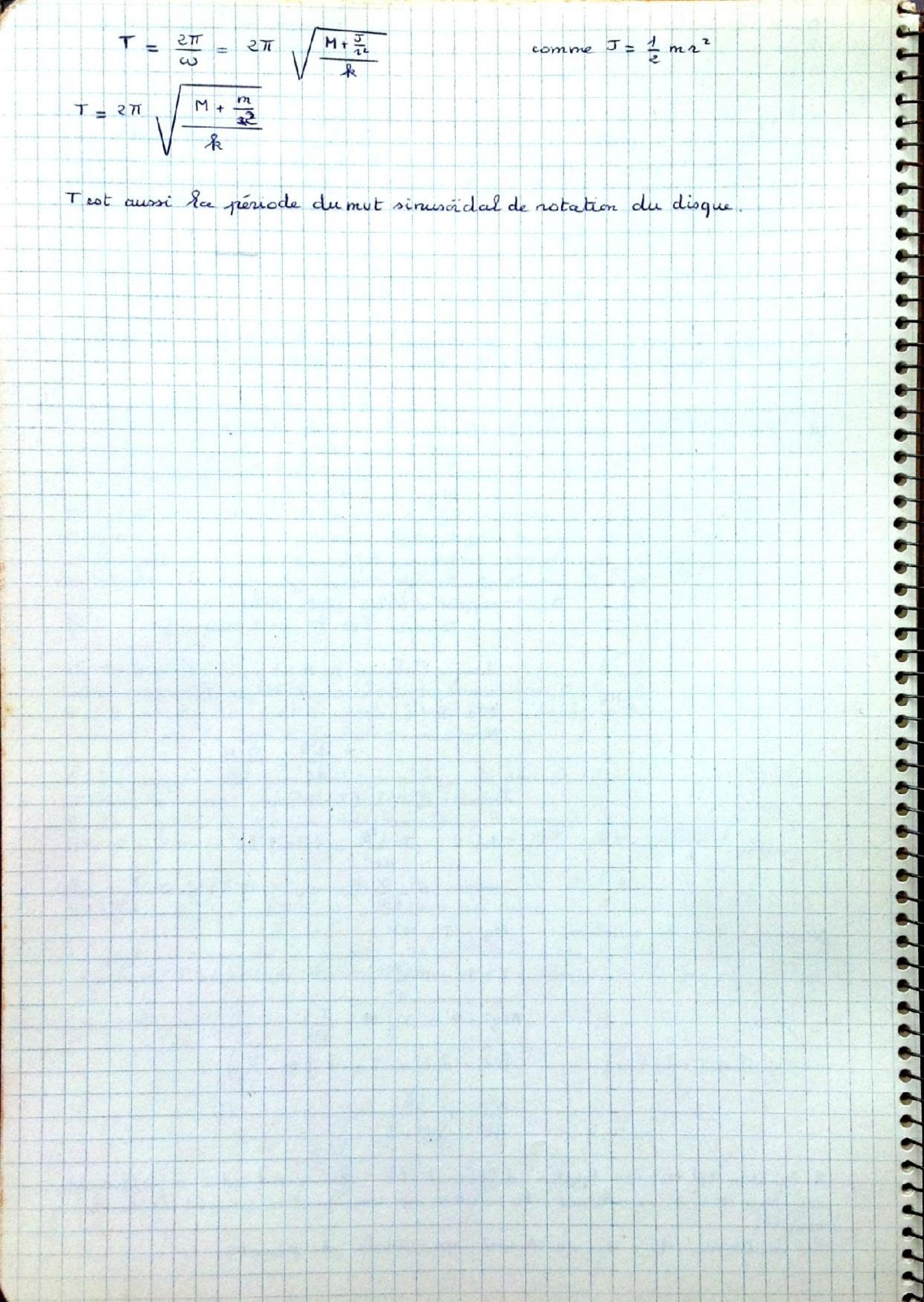
$$Mg - T' = \gamma\left(M + \frac{J}{r^2}\right)$$

ou, cf(1) et $T' = k(l+x)$

$$kl - k(l+x) = \gamma\left(M + \frac{J}{r^2}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M + \frac{J}{r^2}} x = 0 \quad (3)$$

L'équation (3) est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et à 2e membre nul. La solution est une fonction sinusoïdale de la variable.
Les oscillations du c.d.i de A sont sinusoïdale de période



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{J}{r^2}}{k}}$$ comme $J = \frac{1}{2} m r^2$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{m}{2}}{k}}$$

T est aussi la période du mvt sinusoïdal de rotation du disque.

Définition du travail élémentaire d'une force $\vec{f}$.

Un point matériel M auquel est appliqué une force $\vec{f}$ subit un déplacement élémentaire noté $\vec{dl}$ et supposé rectiligne. La force $\vec{f}$ est supposée constante au cours de ce déplacement élémentaire. On appelle travail élémentaire de la force $\vec{f}$ au cours de ce déplacement le produit scalaire

$$dW = \vec{f} \cdot \vec{dl}$$

On a évidemment $dW = \|\vec{f}\| . \|\vec{dl}\| . \cos(\vec{f}, \vec{dl})$.

On a encore dW = produit des mesures algébriques de $\vec{f}$ (ou de $\vec{dl}$) et de la projection orthogonale de $\vec{dl}$ (ou de $\vec{f}$) sur le support orienté de $\vec{f}$ (ou de $\vec{dl}$).

Application de la définition à quelques cas particuliers.

Si l'on envisage un déplacement quelconque du point matériel M entre les positions M_1 et M_2, au cours de ce déplacement, la force $\vec{f}$ varie, mais il est toujours possible de décomposer le déplacement total en déplacements élémentaires suffisamment petits pour que l'arc correspondant puisse être considéré comme rectiligne et pour que la force $\vec{f}$ puisse être considérée comme constante au cours de ce déplacement élémentaire. Le travail total est la somme de tous ces travaux élémentaires

$$\underset{M_1}{\overset{M_2}{W}} = \sum_{M_1}^{M_2} \vec{f} . \vec{dl}.$$

Cette somme peut être calculée simplement dans quelques cas particuliers:

1er cas : la force $\vec{f}$ demeure constante au cours du déplacement curviligne M_1M_2

On trace l'axe $x'x$ colinéaire de $\vec{f}$. Le travail élémentaire dW correspondant au déplacement $\vec{dl}$:

$$dW = \bar{f} \cdot \overline{proj_{x'x} \vec{dl}}$$

Donc $$\underset{M_1}{\overset{M_2}{W}} = \bar{f} \cdot \overline{proj_{x'x} (dépl^t. M_1M_2)}$$

Ce résultat est applicable en particulier au calcul du travail du poids $m\vec{g}$ d'un corps de masse d'inertie m lorsque l'intensité $\vec{g}$ du champs de pesanteur peut être considéré comme constante dans toute la région intéressant le déplacement.

(fig 1)

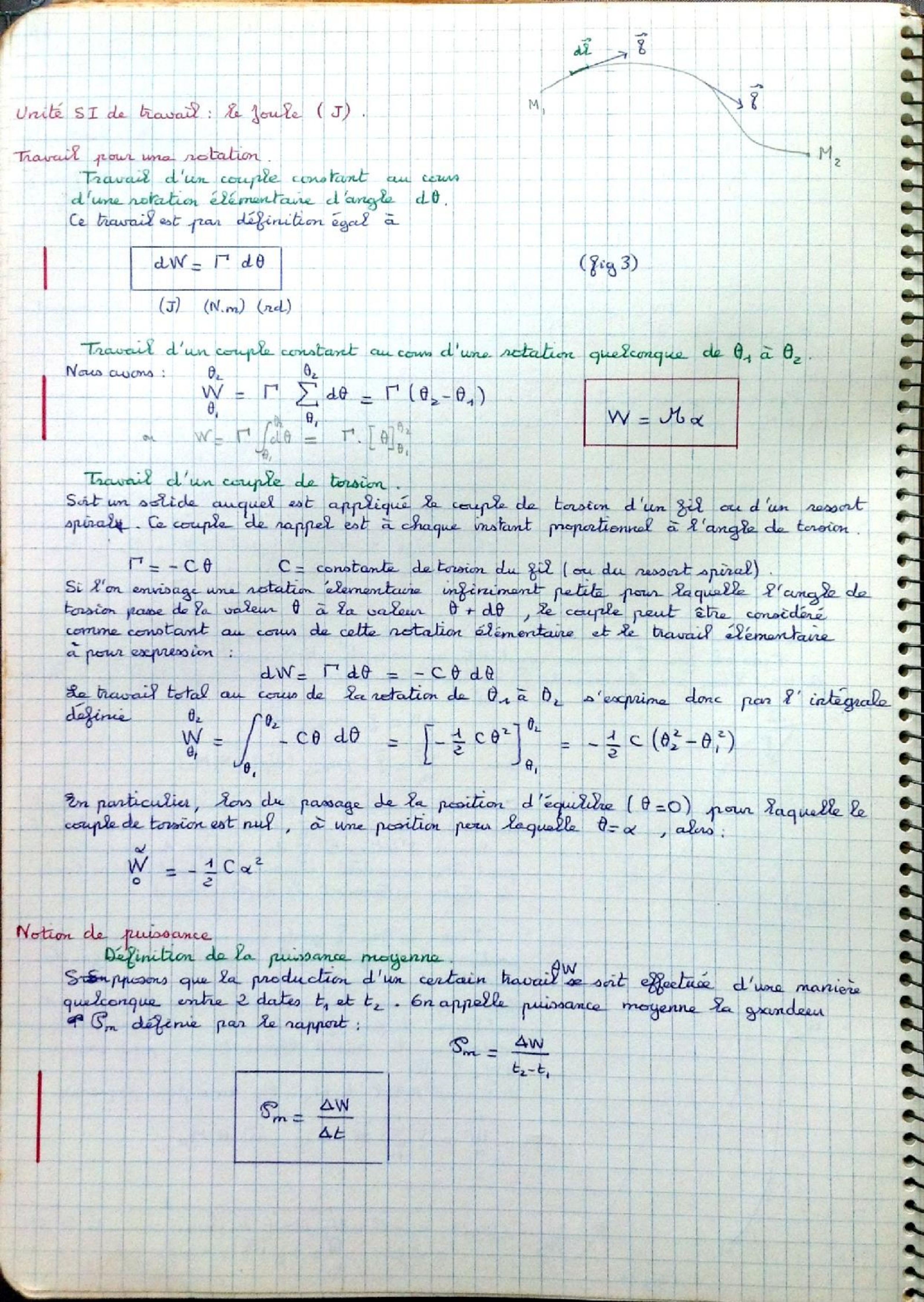
2e cas : la force $\vec{f}$ garde une norme constante et est constamment tangente à la trajectoire curviligne du point M. (voir fig 3)

Pour le déplacement $\vec{dl}$ assimilé à une déplacement rectiligne, la force $\vec{f}$ et le vecteur $\vec{dl}$ sont pratiquement colinéaires. Le travail élémentaire a pour expression $dW = \bar{f} \cdot \overline{dl}$

Le travail total de M_1 à M_2 aura pour expression :

$$\underset{M_1}{\overset{M_2}{W}} = \bar{f} \sum_{M_1}^{M_2} \overline{dl} = \bar{f} \cdot \text{arc } M_1M_2$$

(fig 2) : travail indépendant du chemin suivi entre les côtes z_1 et z_2. $\underset{M_1}{\overset{M}{W}} = mg\,\overline{HK} = mg(z_2 - z_1)$



$d\vec{l}$ $\vec{f}$

M_1 $\vec{f}$ M_2

Unité SI de travail : le Joule (J).

Travail pour une rotation.

Travail d'un couple constant au cours d'une rotation élémentaire d'angle $d\theta$.
Ce travail est par définition égal à

$$dW = \Gamma \, d\theta$$

(J) (N.m) (rd)

(fig 3)

Travail d'un couple constant au cours d'une rotation quelconque de θ_1 à θ_2.
Nous avons :

$$\underset{\theta_1}{\overset{\theta_2}{W}} = \Gamma \sum_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \Gamma(\theta_2 - \theta_1)$$

ou $W = \Gamma \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \Gamma . [\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}$

$$W = \mathcal{M} \alpha$$

Travail d'un couple de torsion.
Soit un solide auquel est appliqué le couple de torsion d'un fil ou d'un ressort spiral. Ce couple de rappel est à chaque instant proportionnel à l'angle de torsion.

$\Gamma = -C\theta$ C = constante de torsion du fil (ou du ressort spiral).
Si l'on envisage une rotation élémentaire infiniment petite pour laquelle l'angle de torsion passe de la valeur θ à la valeur $\theta + d\theta$, le couple peut être considéré comme constant au cours de cette rotation élémentaire et le travail élémentaire a pour expression :

$$dW = \Gamma \, d\theta = -C\theta \, d\theta$$

Le travail total au cours de la rotation de θ_1 à θ_2 s'exprime donc par l'intégrale définie

$$\underset{\theta_1}{\overset{\theta_2}{W}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -C\theta \, d\theta = \left[-\frac{1}{2} C\theta^2\right]_{\theta_1}^{\theta_2} = -\frac{1}{2} C(\theta_2^2 - \theta_1^2)$$

En particulier, lors du passage de la position d'équilibre ($\theta = 0$) pour laquelle le couple de torsion est nul, à une position pour laquelle $\theta = \alpha$, alors :

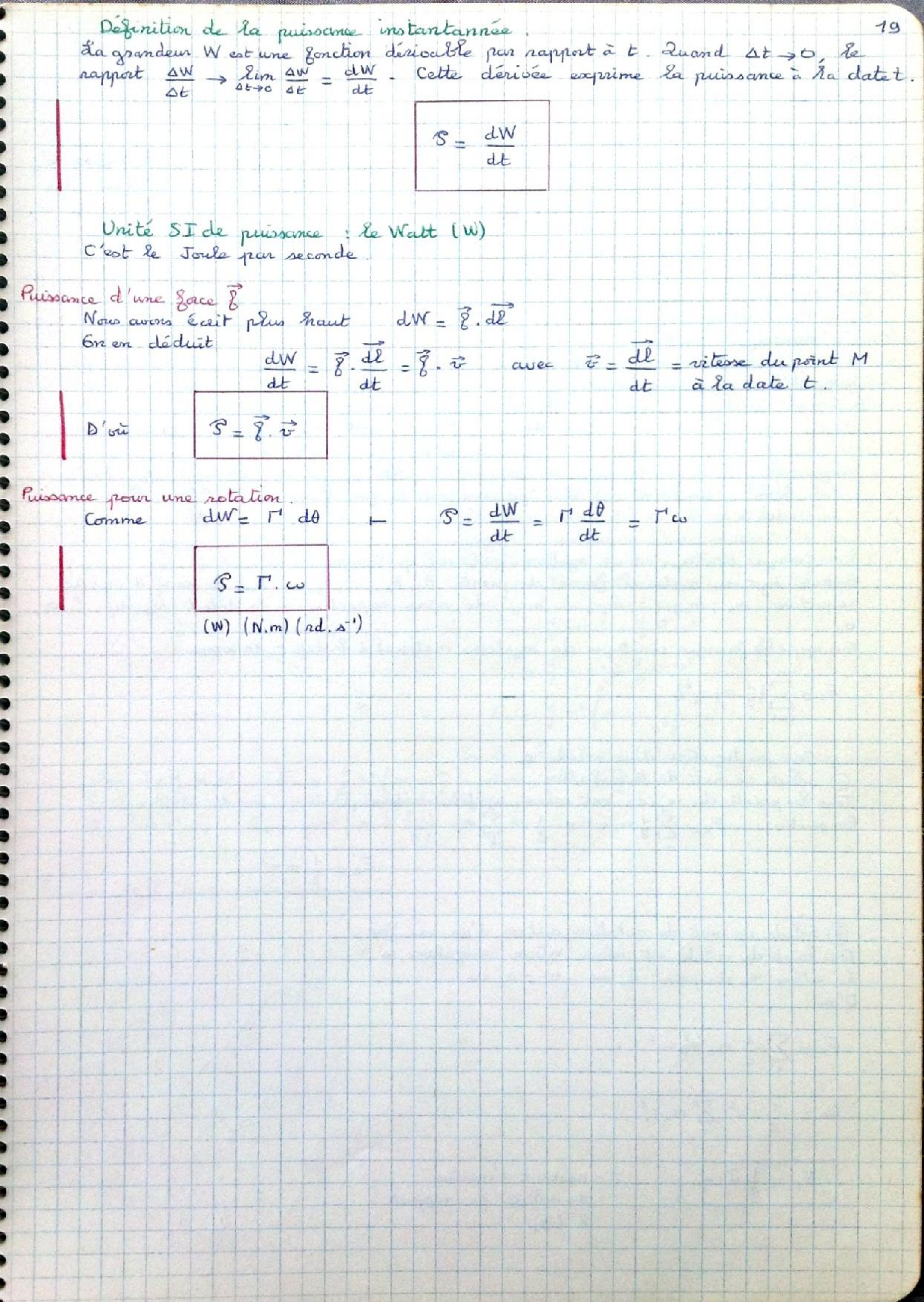
$$\underset{0}{\overset{\alpha}{W}} = -\frac{1}{2} C\alpha^2$$

Notion de puissance

Définition de la puissance moyenne.
Supposons que la production d'un certain travail ΔW se soit effectuée d'une manière quelconque entre 2 dates t_1 et t_2. On appelle puissance moyenne la grandeur $\mathcal{P}_m$ définie par le rapport :

$$\mathcal{P}_m = \frac{\Delta W}{t_2 - t_1}$$

$$\mathcal{P}_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$



Définition de la puissance instantannée.

La grandeur W est une fonction dérivable par rapport à t. Quand $\Delta t \to 0$, le rapport $\frac{\Delta W}{\Delta t} \to \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$. Cette dérivée exprime la puissance à la date t.

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}$$

Unité SI de puissance : le Watt (W)
C'est le Joule par seconde.

Puissance d'une force $\vec{f}$

Nous avons écrit plus haut $dW = \vec{f} \cdot \vec{dl}$

On en déduit

$$\frac{dW}{dt} = \vec{f} \cdot \frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \frac{\vec{dl}}{dt}$$ = vitesse du point M à la date t.

D'où $$\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

Puissance pour une rotation.

Comme $dW = \Gamma \, d\theta$ ⊢ $\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \Gamma \frac{d\theta}{dt} = \Gamma \omega$

$$\mathcal{P} = \Gamma . \omega$$

(W) (N.m) ($rd.s^{-1}$)

Définitions

Energie cinétique d'un point matériel

Soit un point matériel de masse d'inertie m animé à la date t de la vitesse $\vec{v}$, on appelle énergie cinétique de ce point matériel la grandeur E_c définie par l'expression :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2}$$

Remarque

L'énergie cinétique d'un point matériel est une fonction de la date t. Sa dérivée par rapport à t a pour expression :

$$\frac{d(E_c)}{dt} = \frac{1}{2} 2 . m \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= m \vec{v} . \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{v} . \vec{\gamma}$$

$$\frac{d(E_c)}{dt} = (m\vec{\gamma}) . \vec{v} = \vec{f} . \vec{v} = \text{puissance de la force } \vec{f}.$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}$$

Energie cinétique d'un système matériel quelconque

Soit le système matériel formé des points $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots A_n$ de masse d'inertie respectives $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$, de vitesse respectives à la date t $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots v_n$.

On appelle énergie cinétique du système matériel à la date t la somme :

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

Cas particulier d'un solide

ⓐ solide en mvt de translation.

Tous les points du solide ont même vecteur vitesse $\vec{v}$.

Par suite : $E_c = \sum_1^n \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_1^n m_i$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

ⓑ Solide en mvt de rotation autour d'un axe fixe.

Tous les pts du solide ont même vitesse angulaire ω.

La vitesse v_i du point A_i est $v_i = r_i \omega$

D'où :

$$E_c = \sum_1^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_1^n m_i r_i^2$$

(Δ) r_i $\vec{v_i}$ A_i

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2$$

J = moment d'inertie du solide par rapport à (Δ)

Cas général d'un solide animé d'un mvt quelconque

On démontre (et nous admettrons cette propriété) qu'il est toujours possible de décomposer le mvt le plus général d'un solide en un mvt de translation du c.d.i du solide, et mvt rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et en un mvt de rotation du solide autour d'un axe passant par le c.d.i et appelé axe instantanné de rotation. On établit alors que l'énergie cinétique du solide est la somme de 2 termes: $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$. Le premier terme représente l'énergie cinétique de translation d'un pt matériel fictif G affecté de la masse d'inertie totale du solide et animé de la vitesse $\vec{v}$ du c.d.i. Le second terme représente l'énergie cinétique de rotation du solide autour de l'axe instantanné de rotation, ω désignant la vitesse angulaire de rotation à la date t autour de cet axe.

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

Soit, par exemple, un disque plein homogène ou une sphère pleine homogène animée d'un mvt de roulement sans glissement sur une droite $x'x$. A la date t, la vitesse du c.d.i est $\vec{v}$ et la vitesse angulaire autour de l'axe instantanné de rotation (axe de trace O) est ω. v est lié à ω par la relation $v = \omega r$. L'énergie cinétique du solide est :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \frac{v^2}{r^2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{J}{r^2} \right)$$

Si le solide est un disque plein homogène, alors $J = \frac{1}{2} m r^2$, $E_c = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{m}{2} \right)$ donc $E_c = \frac{3}{4} m v^2$.

Si le solide est une sphère pleine homogène, $J = \frac{2}{5} m r^2$, $E_c = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{2m}{5} \right) = \frac{7}{10} m v^2$

Théorème de l'énergie cinétique

Théorème de l'énergie cinétique

Cas d'un point matériel

Nous avons établi précédemment la relation (cf chap 20) $\frac{dE_c}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$, ce que l'on peut écrire

$$dE_c = \vec{f} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dW}{dt} = P$$

dE_c représente la variation élémentaire de l'énergie cinétique du point matériel entre les dates t et $t+dt$.

Or, $\vec{v} \cdot dt = d\vec{l}$, déplacement élémentaire du point matériel entre ces 2 dates. Donc :

$$dE_c = \vec{f} \cdot d\vec{l} = dW$$

La variation élémentaire de l'énergie cinétique d'un point matériel entre les dates t et $t+dt$ est égal au travail élémentaire de la force $\vec{f}$ appliquée au point matériel entre ces deux dates.

Considérons maintenant un intervalle de temps quelconque, la date variant de t_1 à t_2. La variation de l'énergie cinétique du pt matériel entre ces 2 dates sera égale à la somme des travaux élémentaires effectués par la force appliquée au pt matériel entre ces 2 dates.

$$E_{c_2} - E_{c_1} = \text{travail de la force appliquée au pt matériel}$$

Cas d'un système matériel

L'énoncé du théorème de l'énergie cinétique pour un système matériel quelconque découle immédiatement du résultat précédent :

" La variation de l'énergie cinétique d'un système matériel entre deux dates t_1 et t_2 est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures et intérieures au système et appliquées entre ces deux dates."

Cas particulier du solide (indéformable)

M_1 et M_2 désignant 2 pts quelconques du solide.

$$\overrightarrow{M_1M_2}^2 = C^{te} \longrightarrow \frac{d\,\overrightarrow{M_1M_2}^2}{dt} = 0$$

$$2\,\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = 0$$

Soit, O désignant l'origine du repère :

$$2\,\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} \right) = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{v_2} - \vec{v_1}) = 0 \quad (1)$$

Les forces intérieures au système S sont les forces d'interaction mutuelles entre les différents pts du système. Quelle que soit la nature de ces interactions, les forces d'interaction entre 2 points M_1 et M_2 ont pour support la droite $\overrightarrow{M_1M_2}$ et sont opposées, ce que l'on peut exprimer en écrivant :

$$\vec{f_1} = \lambda\, \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\vec{f_2} = -\lambda\, \overrightarrow{M_1M_2}$$

Exprimons les puissances des forces intérieures $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$: $\begin{cases} \mathcal{P}_1 = \vec{f_1}\cdot\vec{v_1} \\ \mathcal{P}_2 = \vec{f_2}\cdot\vec{v_2} \end{cases}$

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \vec{f_1}\vec{v_1} + \vec{f_2}\vec{v_2}$$

soit, en tenant compte de (1) et (2) : $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \lambda\, \overrightarrow{M_1M_2}\,(\vec{v_1} - \vec{v_2}) = 0$

La somme algébrique des puissances est nulle. Donc la som. alg. des travaux est nulle. Dans le cas particulier du solide, la somme algébrique des travaux des forces intérieures est nulle et le théorème de l'énergie cinétique s'énonce alors comme suit : "La variation de l'énergie cinétique d'un solide entre 2 dates t_1 et t_2 est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures appliquées au solide entre ces deux dates".

22 Application du théorème de l'énergie cinétique à l'étude de quelques mvts

Nous reprendrons ici certains exercices déjà traités par application des relations de la dynamique.

Mvt de translation d'un solide suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné.

Les frottements sont supposés négligeables.

date 0 : vitesse v_0
date t : vitesse v.

Les forces appliquées sont le poids $m\vec{g}$, la réaction $\vec{R}$ normale au plan incliné car les frottements sont négligeables.

$$E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

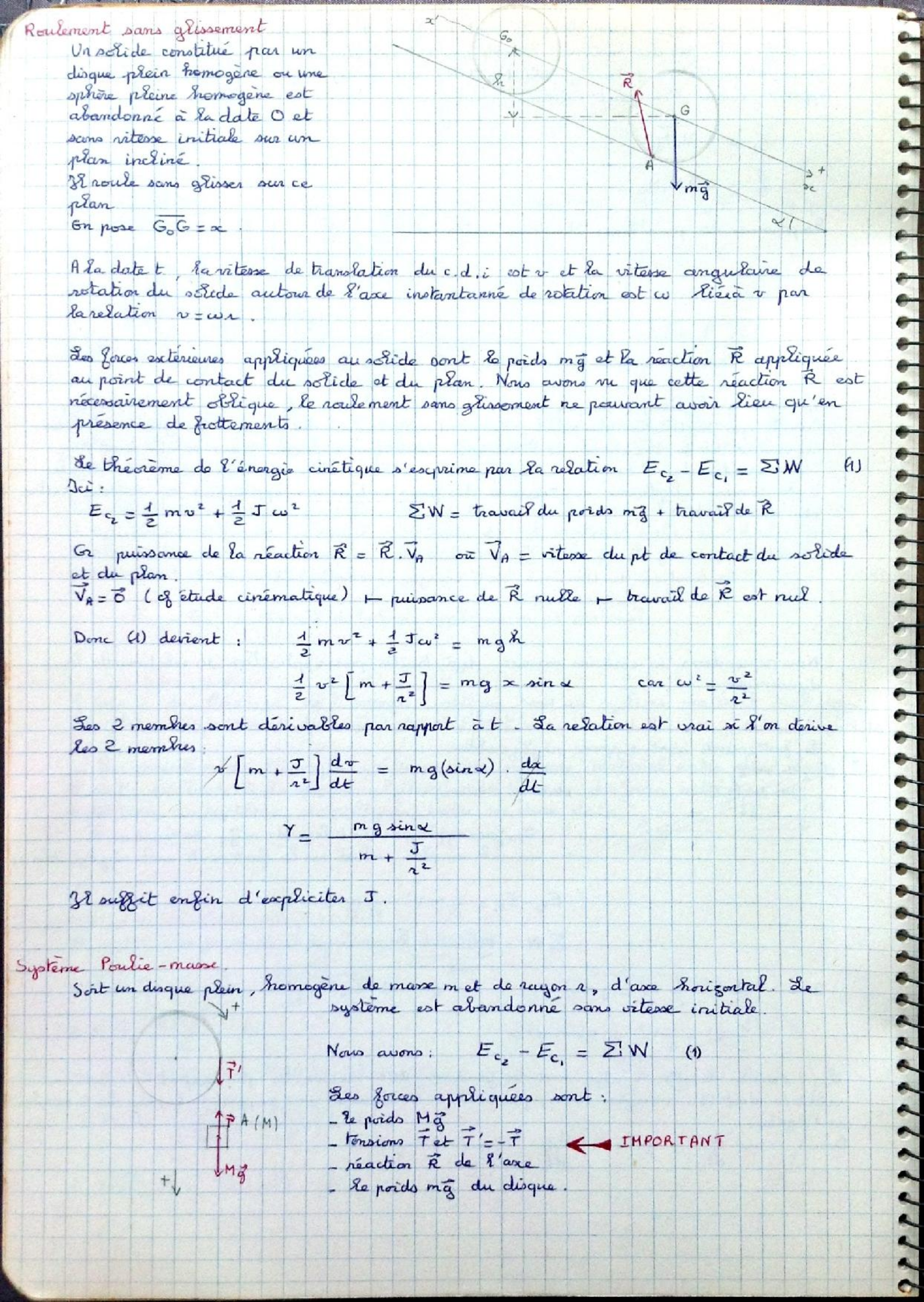
$$\Sigma W = \underbrace{\text{travail de } \vec{R}}_{\text{nul}} + mgh$$

Donc $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = g\,x \sin\alpha$ en posant $\overline{G_0G} = x$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = g(\sin\alpha)\,x$$

Les 2 membres de cette relation sont des fonctions de t dérivables par rapport à t est la relation doit être vérifiée $\forall t$, par suite, les dérivées par rapport à t pour les 2 membres sont égales.

Donc $\cancel{v}\,\frac{dv}{dt} = g(\sin\alpha)\frac{dx}{\cancel{dt}} \mapsto \gamma = g\sin\alpha$



Roulement sans glissement

Un solide constitué par un disque plein homogène ou une sphère pleine homogène est abandonné à la date 0 et sans vitesse initiale sur un plan incliné.
Il roule sans glisser sur ce plan.
On pose $\overline{G_0G} = x$.

A la date t, la vitesse de translation du c.d.i est v et la vitesse angulaire de rotation du solide autour de l'axe instantané de rotation est ω liée à v par la relation $v = \omega r$.

Les forces extérieures appliquées au solide sont le poids $m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ appliquée au point de contact du solide et du plan. Nous avons vu que cette réaction $\vec{R}$ est nécessairement oblique, le roulement sans glissement ne pouvant avoir lieu qu'en présence de frottements.

Le théorème de l'énergie cinétique s'exprime par la relation $E_{c_2} - E_{c_1} = \Sigma W$ (1)
Ici :

$E_{c_2} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$ ΣW = travail du poids $m\vec{g}$ + travail de $\vec{R}$

Or puissance de la réaction $\vec{R} = \vec{R} \cdot \vec{V}_A$ où $\vec{V}_A$ = vitesse du pt de contact du solide et du plan.
$\vec{V}_A = \vec{0}$ (cf étude cinématique) ⊢ puissance de $\vec{R}$ nulle ⊢ travail de $\vec{R}$ est nul.

Donc (1) devient :

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = m g h$$

$$\frac{1}{2} v^2 \left[m + \frac{J}{r^2} \right] = m g \, x \sin\alpha \qquad \text{car } \omega^2 = \frac{v^2}{r^2}$$

Les 2 membres sont dérivables par rapport à t. La relation est vrai si l'on dérive les 2 membres :

$$\cancel{v} \left[m + \frac{J}{r^2} \right] \frac{dv}{dt} = m g (\sin\alpha) \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\gamma = \frac{m g \sin\alpha}{m + \frac{J}{r^2}}$$

Il suffit enfin d'expliciter J.

Système Poulie-masse

Soit un disque plein, homogène de masse m et de rayon r, d'axe horizontal. Le système est abandonné sans vitesse initiale.

Nous avons : $E_{c_2} - E_{c_1} = \Sigma W$ (1)

Les forces appliquées sont :
- le poids $M\vec{g}$
- tensions $\vec{T}$ et $\vec{T}' = -\vec{T}$ ⟵ IMPORTANT
- réaction $\vec{R}$ de l'axe
- le poids $m\vec{g}$ du disque.

date 0 : vitesse nulle.
date t : vitesse de A : $\vec{v}$
vitesse angulaire du disque : $\omega = \frac{v}{r}$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

J désignant le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe de (Δ)

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} v^2 \left[M + \frac{J}{r^2} \right]$$

Or :

$$\Sigma W = \underbrace{\text{travail de } \vec{R}}_{\text{nul}} + \underbrace{\text{travail de } m\vec{g}}_{\text{nul}} + \text{travail de } \vec{T} + \text{travail de } \vec{T}' + \text{travail de } M\vec{g}$$

travail de $\vec{T}$ pour le deplacement $\overline{G_0G} = x$; $= -Tx$
Au déplacement $\overline{G_0G} = x$ correspond une rotation du disque : $\theta = \frac{x}{r}$

Le travail de $\vec{T}' =$ Moment de $\vec{T}' \times \theta = T'r \cdot \frac{x}{r} = T'x = Tx$

En conclusion, la somme algébrique des travaux des tensions $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ est nulle.
La variation de l'énergie cinétique du système est égale au travail du poids $M\vec{g}$.

(1) devient :
$$\frac{1}{2} v^2 \left(M + \frac{J}{r^2} \right) = Mgx$$
$$v \left(M + \frac{J}{r^2} \right) \frac{dv}{dt} = Mg \frac{dx}{dt} \quad \vdash \quad \gamma = \frac{M}{M + \frac{J}{r^2}} g$$

Ici $J = \frac{1}{2} m r^2$
$$\gamma = \frac{M}{M + \frac{m}{2}} g$$

Autre exercice.

+ poulie ≃ jante mince de masse m et de rayon r

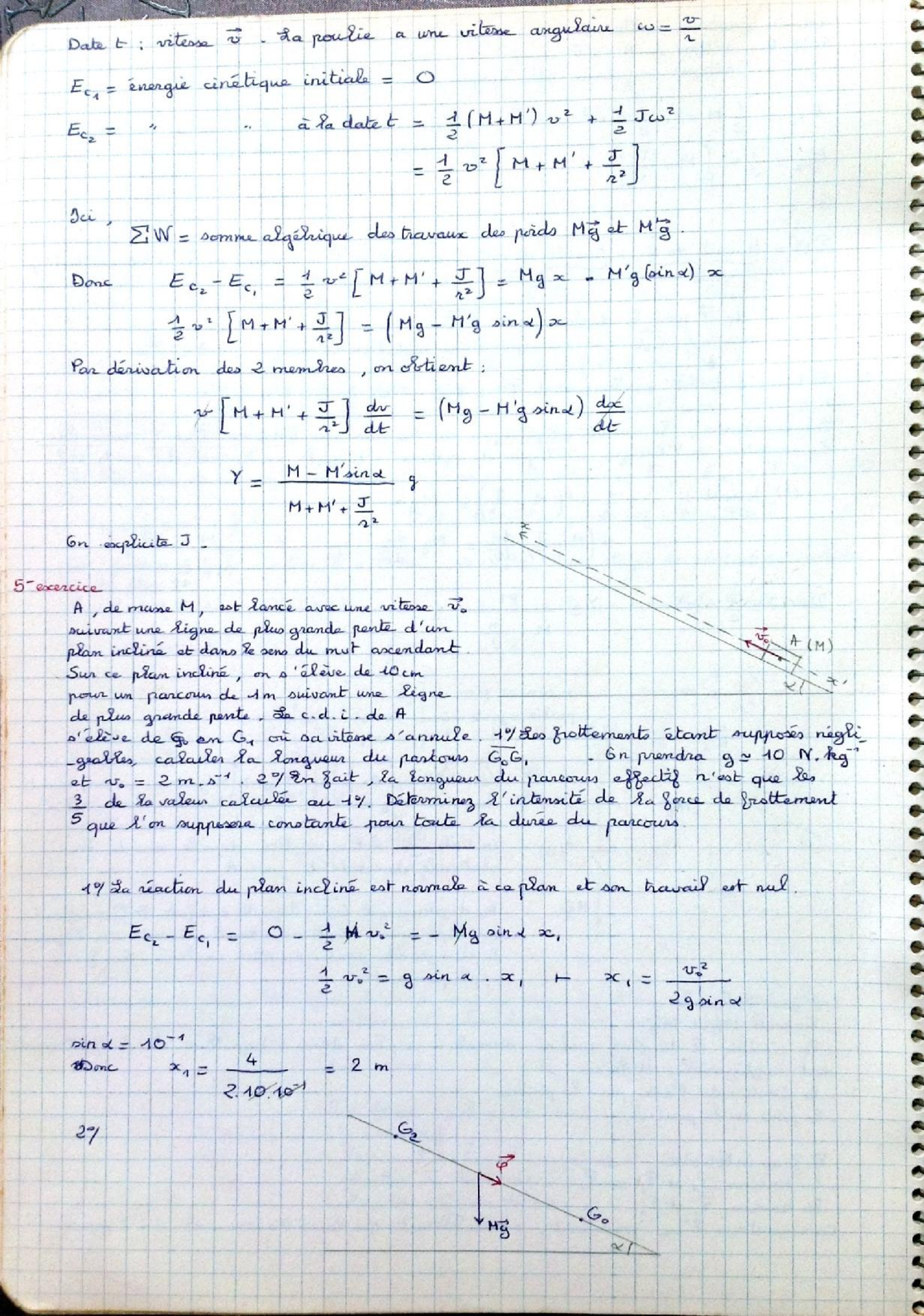
$\vec{R}$ $\vec{T}$ G' (M') B G' $M'\vec{g}$ α ↓+ A (M) G_0 $M\vec{g}$ G

On suppose par exemple $M > M' \sin\alpha$. Dans ces conditions le poids $Mg > M'g \sin\alpha$, composante du poids $M'g$ suivant la direction du plan incliné, et, le système étant abandonné sans vitesse initiale, le mvt aura lieu dans le sens de la verticale descendante pour A.

Au déplacement $\overline{G_0G} = x$ du c.d.i. de A correspond un déplacement $\overline{G_0'G'} = x$ de B suivant une ligne de plus grande pente du plan incliné. Les forces appliquées sont :

a) forces extérieures :
- les poids $M\vec{g}$ et $M'\vec{g}$
- la réaction $\vec{R}$ du plan incliné normale à ce plan dans l'hypothèse où les frottements sont négligeables et la réa
- la réaction de l'axe pour la poulie
- le poids de la poulie.

b) forces intérieures
- les tensions $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$
- les tensions $\vec{T}_2$ et $\vec{T}_2'$
Comme dans l'ex. précédent, on établirait que leurs travaux sont 2 à 2 opposés.



Date t : vitesse $\vec{v}$. La poulie a une vitesse angulaire $\omega = \frac{v}{r}$

E_{c_1} = énergie cinétique initiale = 0

E_{c_2} = " " à la date t $= \frac{1}{2}(M+M')v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$

$$= \frac{1}{2}v^2\left[M+M'+\frac{J}{r^2}\right]$$

Ici,

ΣW = somme algébrique des travaux des poids $M\vec{g}$ et $M'\vec{g}$.

Donc $E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2}v^2\left[M+M'+\frac{J}{r^2}\right] = Mg\,x - M'g(\sin\alpha)\,x$

$$\frac{1}{2}v^2\left[M+M'+\frac{J}{r^2}\right] = (Mg - M'g\sin\alpha)\,x$$

Par dérivation des 2 membres, on obtient :

$$v\left[M+M'+\frac{J}{r^2}\right]\frac{dv}{dt} = (Mg - M'g\sin\alpha)\frac{dx}{dt}$$

$$\gamma = \frac{M - M'\sin\alpha}{M+M'+\frac{J}{r^2}}\,g$$

On explicite J.

5-exercice

A, de masse M, est lancé avec une vitesse $\vec{v_0}$ suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné et dans le sens du mvt ascendant. Sur ce plan incliné, on s'élève de 10 cm pour un parcours de 1 m suivant une ligne de plus grande pente. Le c.d.i. de A s'élève de G_0 en G_1 où sa vitesse s'annule. 1°/ Les frottements étant supposés négligeables, calculer la longueur du parcours $\overline{G_0G_1}$. On prendra $g \simeq 10$ N.kg^{-1} et $v_0 = 2$ m.s^{-1}. 2°/ En fait, la longueur du parcours effectif n'est que les $\frac{3}{5}$ de la valeur calculée au 1°/. Déterminez l'intensité de la force de frottement que l'on supposera constante pour toute la durée du parcours.

1°/ La réaction du plan incliné est normale à ce plan et son travail est nul.

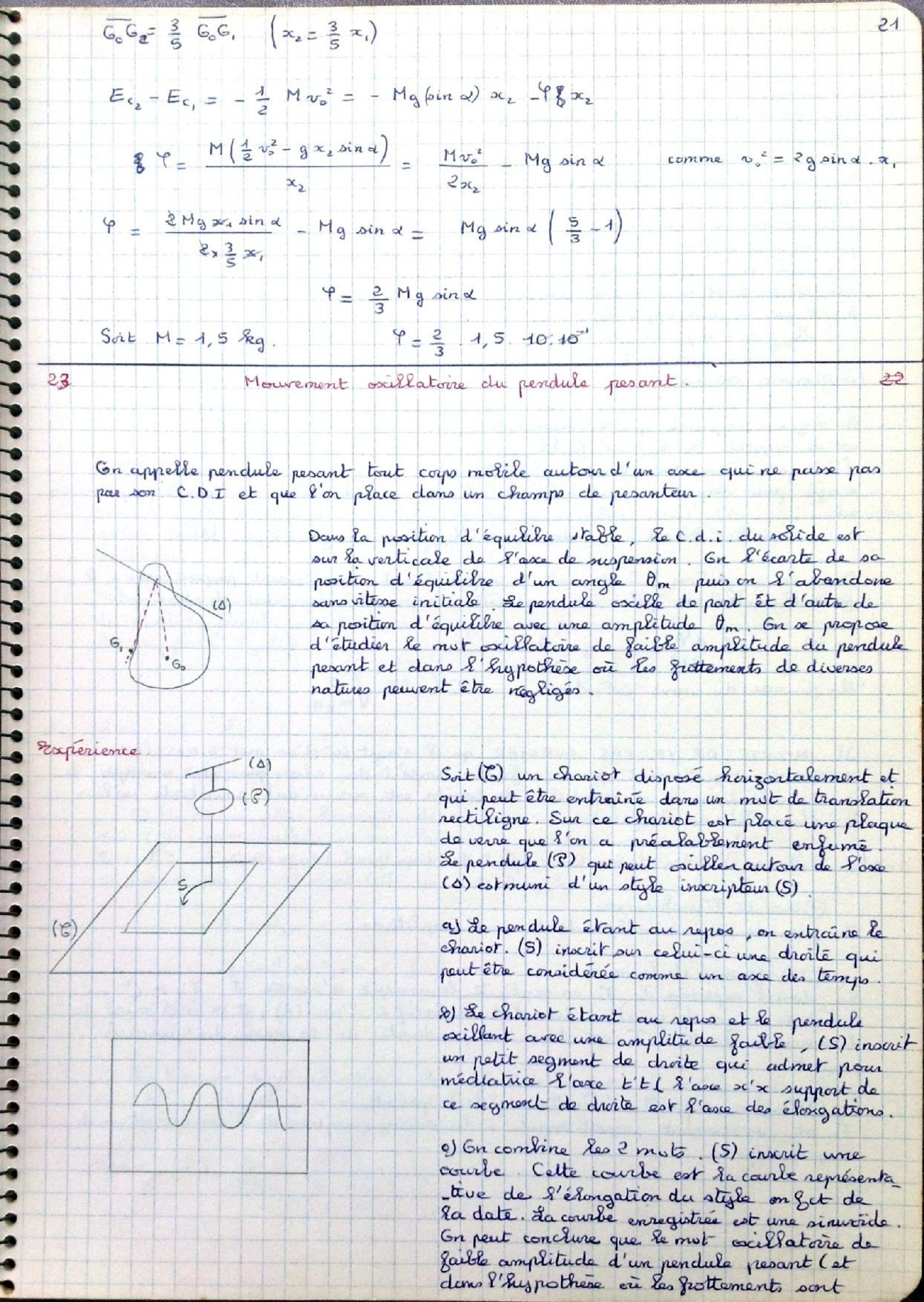
$$E_{c_2} - E_{c_1} = 0 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = -Mg\sin\alpha\, x_1$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 = g\sin\alpha \,.\, x_1 \quad \vdash \quad x_1 = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}$$

$\sin\alpha = 10^{-1}$

Donc $x_1 = \frac{4}{2.10.10^{-1}} = 2$ m

2°/



$\overline{G_0G_2} = \frac{3}{5}\,\overline{G_0G_1}$ $\left(x_2 = \frac{3}{5}x_1\right)$

$$E_{c_2} - E_{c_1} = -\frac{1}{2} M v_0^2 = -Mg(\sin\alpha)\,x_2 - \varphi\, x_2$$

$$\varphi = \frac{M\left(\frac{1}{2}v_0^2 - g\,x_2\sin\alpha\right)}{x_2} = \frac{Mv_0^2}{2x_2} - Mg\sin\alpha$$ comme $v_0^2 = 2g\sin\alpha \,.\, x_1$

$$\varphi = \frac{2Mg\,x_1\sin\alpha}{2\times\frac{3}{5}x_1} - Mg\sin\alpha = Mg\sin\alpha\left(\frac{5}{3} - 1\right)$$

$$\varphi = \frac{2}{3}Mg\sin\alpha$$

Soit $M = 1{,}5$ kg. $\varphi = \frac{2}{3} \,.\, 1{,}5 \,.\, 10 \,.\, 10^{-1}$

Mouvement oscillatoire du pendule pesant.

On appelle pendule pesant tout corps mobile autour d'un axe qui ne passe pas par son C.D.I et que l'on place dans un champ de pesanteur.

Dans la position d'équilibre stable, le C.d.i. du solide est sur la verticale de l'axe de suspension. On l'écarte de sa position d'équilibre d'un angle θ_m puis on l'abandonne sans vitesse initiale. Le pendule oscille de part et d'autre de sa position d'équilibre avec une amplitude θ_m. On se propose d'étudier le mvt oscillatoire de faible amplitude du pendule pesant et dans l'hypothèse où les frottements de diverses natures peuvent être négligés.

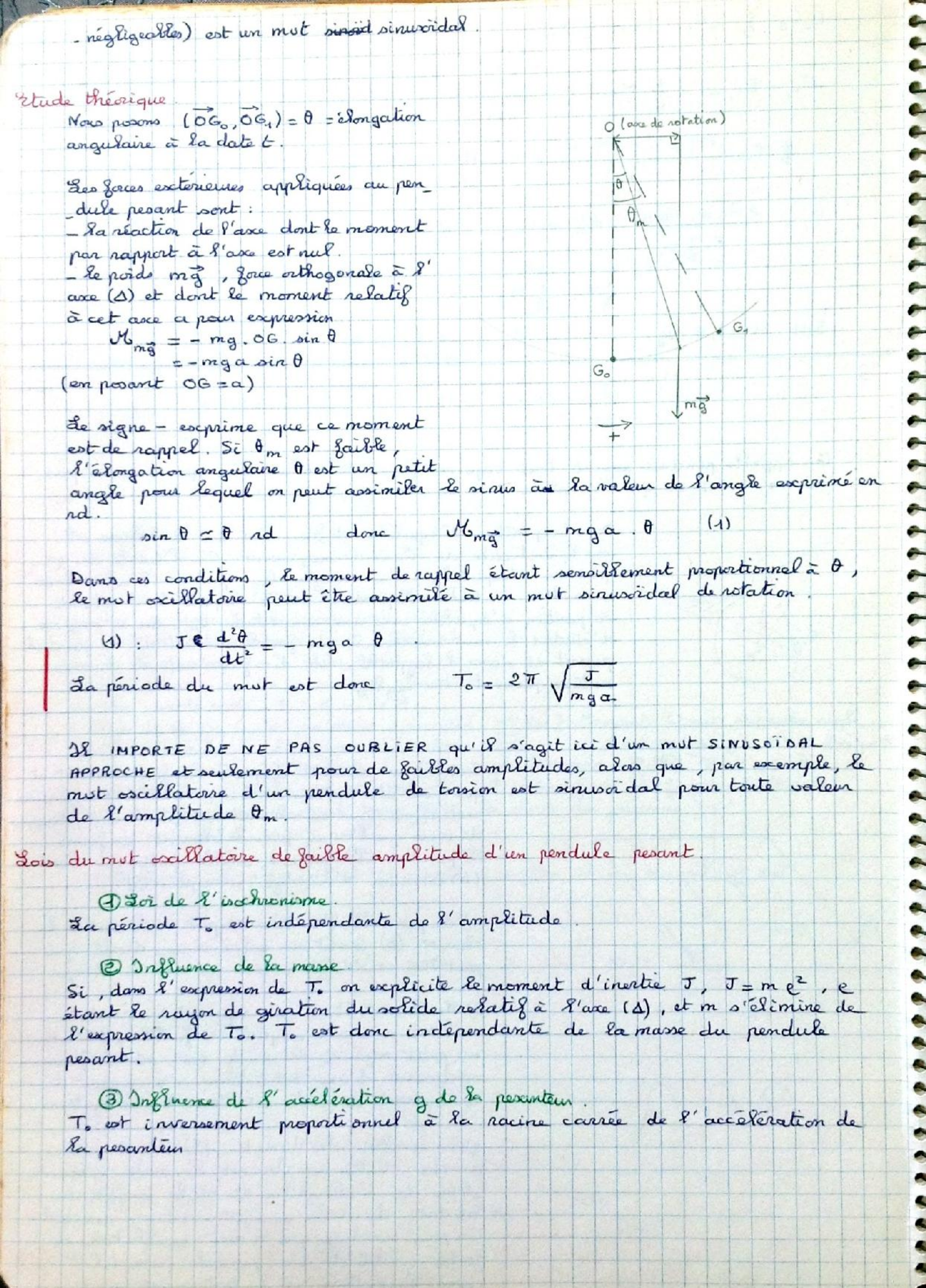
Expérience

Soit (C) un chariot disposé horizontalement et qui peut être entraîné dans un mvt de translation rectiligne. Sur ce chariot est placé une plaque de verre que l'on a préalablement enfumé. Le pendule (P) qui peut osciller autour de l'axe (Δ) est muni d'un style inscripteur (S).

a) Le pendule étant au repos, on entraîne le chariot. (S) inscrit sur celui-ci une droite qui peut être considérée comme un axe des temps.

b) Le chariot étant au repos et le pendule oscillant avec une amplitude faible, (S) inscrit un petit segment de droite qui admet pour médiatrice l'axe t't (l'axe x'x support de ce segment de droite est l'axe des élongations.

c) On combine les 2 mvts. (S) inscrit une courbe. Cette courbe est la courbe représentative de l'élongation du style en fct de la date. La courbe enregistrée est une sinusoïde. On peut conclure que le mvt oscillatoire de faible amplitude d'un pendule pesant (et dans l'hypothèse où les frottements sont



- négligeables) est un mvt ~~sinsoïd~~ sinusoïdal.

Etude théorique

Nous posons $(\vec{OG_0}, \vec{OG_1}) = \theta$ = élongation angulaire à la date t.

Les forces extérieures appliquées au pendule pesant sont :

- la réaction de l'axe dont le moment par rapport à l'axe est nul.
- le poids $m\vec{g}$, force orthogonale à l'axe (Δ) et dont le moment relatif à cet axe a pour expression

$$\mathcal{M}_{m\vec{g}} = -mg \cdot OG \cdot \sin\theta$$
$$= -mga\sin\theta$$

(en posant $OG = a$)

Le signe − exprime que ce moment est de rappel. Si θ_m est faible, l'élongation angulaire θ est un petit angle pour lequel on peut assimiler le sinus à la valeur de l'angle exprimé en rd.

$\sin\theta \simeq \theta$ rd donc $\mathcal{M}_{m\vec{g}} = -mga \cdot \theta$ (1)

Dans ces conditions, le moment de rappel étant sensiblement proportionnel à θ, le mvt oscillatoire peut être assimilé à un mvt sinusoïdal de rotation.

(1) : $J \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -mga\,\theta$.

La période du mvt est donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}$

IL IMPORTE DE NE PAS OUBLIER qu'il s'agit ici d'un mvt SINUSOÏDAL APPROCHE et seulement pour de faibles amplitudes, alors que, par exemple, le mvt oscillatoire d'un pendule de torsion est sinusoïdal pour toute valeur de l'amplitude θ_m.

Lois du mvt oscillatoire de faible amplitude d'un pendule pesant.

① Loi de l'isochronisme.

La période T_0 est indépendante de l'amplitude.

② Influence de la masse

Si, dans l'expression de T_0 on explicite le moment d'inertie J, $J = m\rho^2$, ρ étant le rayon de giration du solide relatif à l'axe (Δ), et m s'élimine de l'expression de T_0. T_0 est donc indépendante de la masse du pendule pesant.

③ Influence de l'accélération g de la pesanteur.

T_0 est inversement proportionnel à la racine carrée de l'accélération de la pesanteur

On appelle pendule simple un corps de très petite dimension, pratiquement assimilable à une masse m suspendu à un fil inextensible et de masse négligeable. (une petite bille suspendu à un fil dont la longueur est grande par rapport au diamètre de la bille réalise approximativement un pendule simple).

① Expression de la période T_0 des oscillations de faible amplitude d'un pend. simple

De $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$ Ici $\ell = a$ et $J_\Delta = m\,\ell^2$

D'où $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

② Lois du mvt oscillatoire de faible amplitude d'un pendule simple.
On retrouve les 3 énoncés précédents auxquels il faut ajouter une 4° loi dite loi des longueurs :
T_0 est proportionnel à la racine carrée des longueurs.

③ Pendule simple synchrone d'un pendule pesant.
On appelle ainsi le pendule simple qui oscille en un lieu donné avec une période égale à celle du pendule pesant en ce même lieu. (On peut remarquer qu'au terme synchrone généralement employé on peut substituer le terme isochrone).

Déterminons pour un pendule donné et un axe d'oscillation donné la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule pesant. Cette longueur est donnée par l'égalité
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$$

d'où $\ell = \frac{J}{ma}$

Traitons 2 exemples :

ⓐ Un disque plein homogène de masse m et de rayon r oscille autour d'un axe (Δ) perpendiculaire en son plan en un point de son contour. Ici $a = r$.
Le c.d.i. est en O, centre du disque. En désignant par (Δ') l'axe parallèle à (Δ) et passant par O, il vient (théorème de Huyghens) :

$$J_\Delta = J_{\Delta'} + mr^2$$

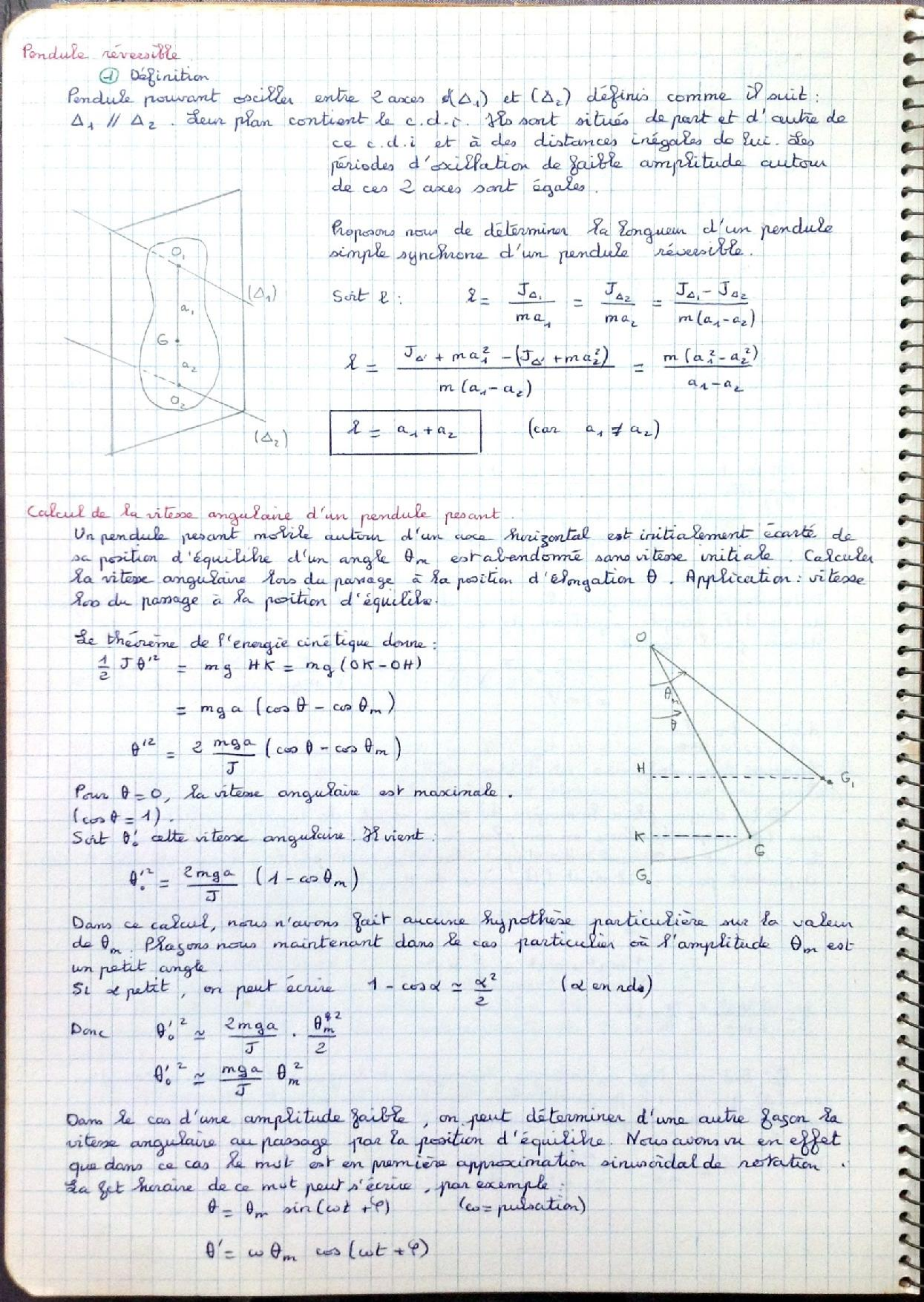
$$J_\Delta = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

$$\ell = \frac{3mr^2}{2mr} = \frac{3}{2}mr^2$$

ⓑ Soit une tige cylindrique homogène de longueur ℓ mobile autour d'un axe (Δ) qui lui est perpendiculaire en l'une de ses extrémités.
$a = \frac{\ell}{2}$. On sait que $J_\Delta = \frac{1}{3}m\,\ell^2$

Donc $$\ell' = \frac{J_\Delta}{ma} = \frac{m\ell^2}{3\times\frac{m\ell}{2}} = \frac{2}{3}\ell$$

Δ O ℓ



Pendule réversible

1) Définition

Pendule pouvant osciller entre 2 axes (Δ_1) et (Δ_2) définis comme il suit : $\Delta_1 \parallel \Delta_2$. Leur plan contient le c.d.i. Ils sont situés de part et d'autre de ce c.d.i et à des distances inégales de lui. Les périodes d'oscillation de faible amplitude autour de ces 2 axes sont égales.

Proposons nous de déterminer la longueur d'un pendule simple synchrone d'un pendule réversible.

Soit ℓ :

$$\ell = \frac{J_{\Delta_1}}{m a_1} = \frac{J_{\Delta_2}}{m a_2} = \frac{J_{\Delta_1} - J_{\Delta_2}}{m(a_1 - a_2)}$$

$$\ell = \frac{J_{\Delta'} + m a_1^2 - (J_{\Delta'} + m a_2^2)}{m(a_1 - a_2)} = \frac{m(a_1^2 - a_2^2)}{a_1 - a_2}$$

$$\boxed{\ell = a_1 + a_2} \qquad (\text{car } a_1 \neq a_2)$$

Calcul de la vitesse angulaire d'un pendule pesant.

Un pendule pesant mobile autour d'un axe horizontal est initialement écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_m est abandonné sans vitesse initiale. Calculer la vitesse angulaire lors du passage à la position d'élongation θ. Application : vitesse lors du passage à la position d'équilibre.

Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2} J \theta'^2 = mg\, HK = mg\,(OK - OH)$$

$$= mga\,(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

$$\theta'^2 = 2\,\frac{mga}{J}\,(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

Pour $\theta = 0$, la vitesse angulaire est maximale.
$(\cos\theta = 1)$.
Soit θ'_0 cette vitesse angulaire. Il vient :

$$\theta_0'^2 = \frac{2mga}{J}\,(1 - \cos\theta_m)$$

Dans ce calcul, nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur la valeur de θ_m. Plaçons nous maintenant dans le cas particulier où l'amplitude θ_m est un petit angle.

Si α petit, on peut écrire $1 - \cos\alpha \simeq \frac{\alpha^2}{2}$ (α en rds)

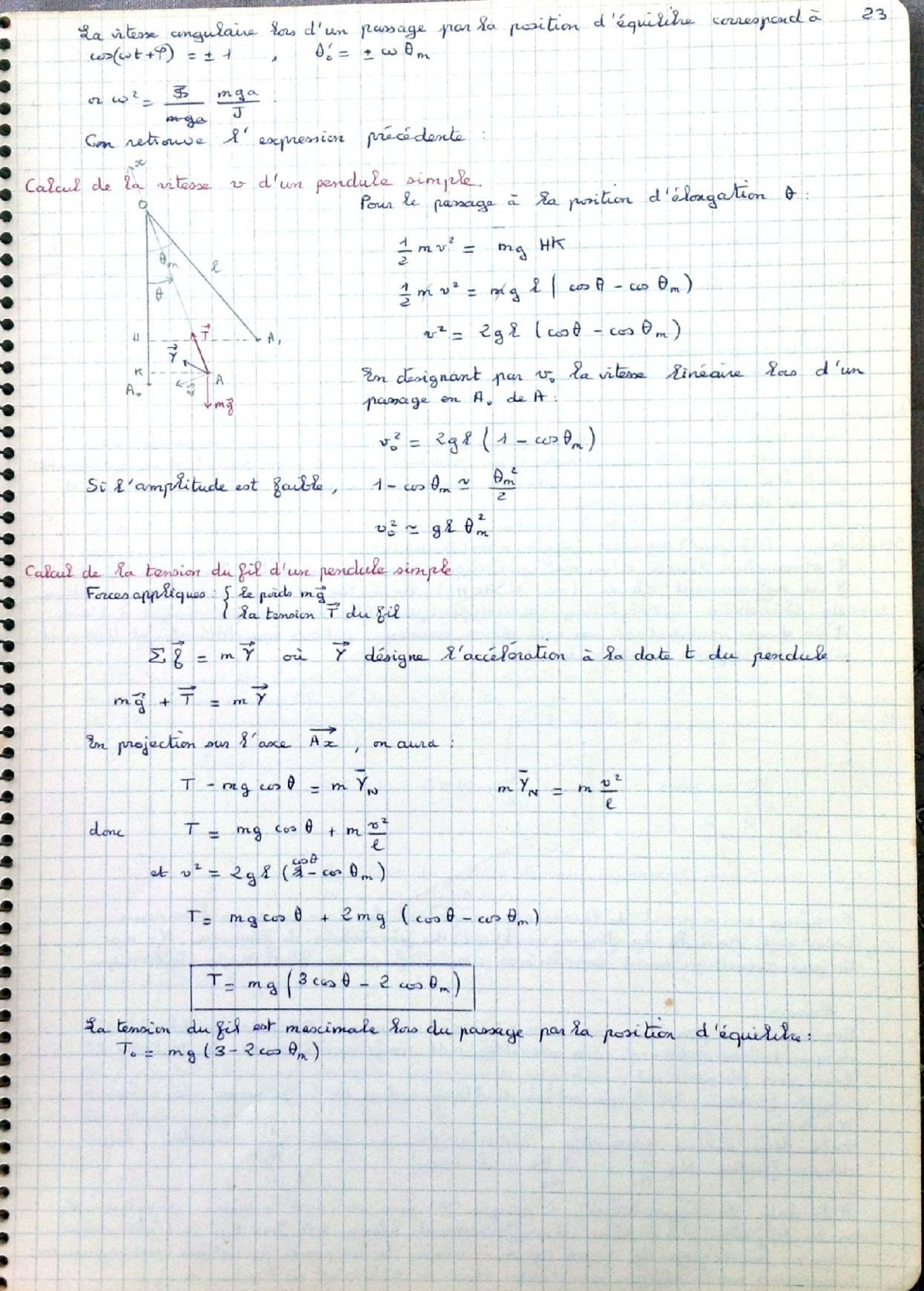
Donc $$\theta_0'^2 \simeq \frac{2mga}{J} \cdot \frac{\theta_m^2}{2}$$

$$\theta_0'^2 \simeq \frac{mga}{J}\,\theta_m^2$$

Dans le cas d'une amplitude faible, on peut déterminer d'une autre façon la vitesse angulaire au passage par la position d'équilibre. Nous avons vu en effet que dans ce cas le mvt est en première approximation sinusoïdal de rotation. La fct horaire de ce mvt peut s'écrire, par exemple :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi) \qquad (\omega = \text{pulsation})$$

$$\theta' = \omega\,\theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$



La vitesse angulaire lors d'un passage par la position d'équilibre correspond à $\cos(\omega t + \varphi) = \pm 1$, $\theta'_0 = \pm \omega \theta_m$

or $\omega^2 = \frac{mga}{J}$

On retrouve l'expression précédente :

Calcul de la vitesse v d'un pendule simple.

Pour le passage à la position d'élongation θ :

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg\, HK$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg\, \ell\, (\cos\theta - \cos\theta_m)$$

$$v^2 = 2g\ell\,(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

En désignant par v_0 la vitesse linéaire lors d'un passage en A_0 de A :

$$v_0^2 = 2g\ell\,(1 - \cos\theta_m)$$

Si l'amplitude est faible, $1 - \cos\theta_m \simeq \frac{\theta_m^2}{2}$

$$v_0^2 \simeq g\ell\,\theta_m^2$$

Calcul de la tension du fil d'un pendule simple

Forces appliquées : $\begin{cases} \text{le poids } m\vec{g} \\ \text{la tension } \vec{T} \text{ du fil} \end{cases}$

$\Sigma \vec{f} = m\vec{\gamma}$ où $\vec{\gamma}$ désigne l'accélération à la date t du pendule.

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$$

En projection sur l'axe $\overrightarrow{Ax}$, on aura :

$$T - mg\cos\theta = m\bar{\gamma}_N \qquad m\bar{\gamma}_N = m\frac{v^2}{\ell}$$

donc $$T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{\ell}$$

et $$v^2 = 2g\ell\,(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

$$T = mg\cos\theta + 2mg\,(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

$$\boxed{T = mg\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_m)}$$

La tension du fil est maximale lors du passage par la position d'équilibre :
$T_0 = mg\,(3 - 2\cos\theta_m)$

Présentations de divers dispositifs permettant l'étude expérimentale de mvts (et plus généralement de phéno_ _mènes) périodiques.

Un phénomène est dit périodique s'il se reproduit identique à lui-même à des dates successives séparées par le même intervalle de temps T. T est la période du phénomène. La fréquence est l'inverse $N = \frac{1}{T}$ de la période, T étant exprimé en secondes.

Dans ce qui précède, nous avons envisagé certains mvts périodiques = mvts sinusoïdaux, mvts oscillatoire d'un pendule pesant.

Méthode utilisant l'enregistrement graphique
Cette méthode a déjà été employée à propos de l'étude expérimentale des oscillations de faible amplitude d'un pendule pesant. Le chariot d'enregistrement peut être remplacé par un cylindre enregistreur entrainée autour de son axe d'un mvt de rotation uniforme.

Stroboscopie (skopein : regarder, strobos = mvt circulaire)
L'observation directe d'un mvt périodique devient impossible dès que la fréquence N est suffisamment élevée (ex: $N > 10\ Hz$). On réalise alors un éclairage périodique du phénomène. Cet éclairage périodique peut être par exemple réalisé à l'aide d'un disque comportant sur une même couronne p trous équidistants et tournant d'un mvt uniforme à raison de n tours.s^{-1}

S

On dirige en un point de la couronne comportant les trous un rayon lumineux convergent. Au delà du disque, on obtient des ~~féo~~ éclairs de fréquence $N_e = np$.
On peut avantageusement remplacer ce dispositif par un stroboscope électronique.

Exemple
Sur un disque peint en noir, on a tracé un rayon OA peint en blanc. Ce disque tourne autour de son axe d'un mvt uniforme à raison de N tours.s^{-1}
Envisageons plusieurs cas:
a) La fréquence du disque est un multiple entier de la fréquence des éclairs.
$N = k N_e$
Entre deux éclairs consécutifs, séparés par une durée $\frac{1}{N_e}$ secondes, le disque effectue $N \times \frac{1}{N_e} = \frac{k N_e}{N_e} = k$ tours

A la date de chaque éclair, le rayon OA sera vu dans la même position et si la fréquence des éclairs est suffisamment élevée ($N_e > 10\ Hz$), l'observateur verra en permanence le rayon OA ~~a~~ à cause de la ~~perces~~ persistance des impressions lumineuses sur la rétine, persistence dont la durée est de l'ordre de $\frac{1}{10}$ s.

Pour l'observateur, le disque pour lequel mvt duquel le rayon OA sert de repère sera apparemment immobile.

b) La fréquence des éclairs est un multiple entier de celle du disque : $N = \frac{N_e}{k}$

Entre 2 éclairs consécutifs séparés par $\frac{1}{N_e}$ secondes, le disque effectue $N \times \frac{1}{N_e} = \frac{N_e}{k N_e} = \frac{1}{k}$ tours.

L'observateur voit sur le disque k rayons immobiles.

c) La fréquence du disque est légèrement différente de la fréquence des éclairs. Par exemple, la fréquence du disque est légèrement supérieure à la fréquence des éclairs.

pendant le m temps, le disque va plus "vite".

α

Entre 2 éclairs consécutifs, séparés par $\frac{1}{N_e}$ s, le disque a effectué un peu plus d'un tour. Il a tourné d'un angle $2\pi + \alpha$ radians. La rotation apparente pour l'observateur est α rd. Le mvt apparent observé est un mvt lent et dans le sens du mvt réel.

$$2\pi + \alpha = \overbrace{2\pi N}^{\text{vitesse angulaire}} \times \underbrace{\frac{1}{N_e}}_{\text{durée}}$$

$$\alpha = 2\pi \frac{N}{N_e} - 2\pi \qquad \text{donc} \qquad \alpha = 2\pi \frac{N - N_e}{N_e}$$

α est la rotation apparente effectuée pendant la durée $\frac{1}{N_e}$ s. La rotation apparente pour 1 s, c'est-à-dire la vitesse angulaire du mvt apparent est $\omega_a = \alpha N_e = 2\pi (N - N_e)$

$\omega_a = 2\pi \nu \qquad \nu = N - N_e$ exprime la fréquence du mvt apparent.

Nous avons noté que ce mvt apparent s'effectue dans le sens du mvt réel.

d) La fréquence du disque est légèrement inférieure à la fréquence des éclairs. Entre 2 éclairs consécutifs, le disque effectue un peu moins d'un tour, il a tourné de $2\pi - \alpha$. Apparemment, il a tourné d'un petit angle α en sens inverse du mvt réel.

A_2 A_1 sens du mvt réel α

$$2\pi - \alpha = 2\pi N \times \frac{1}{N_e} \quad \vdash \quad \alpha = 2\pi \left(1 - \frac{N}{N_e}\right)$$

$$\alpha = 2\pi . \frac{N_e - N}{N_e}$$

La vitesse angulaire du mvt apparent lent est ω_a :

$\omega_a = 2\pi (\underbrace{N_e - N}_{\nu})$

En conclusion (cf c) d)) si la fréquence du disque est légèrement différente de la fréquence des éclairs, le mvt observé est un mvt apparent lent dont la fréquence est $\nu = |N - N_e|$

e) Généralisation des cas c) et d)

La fréquence du disque est légèrement différente d'un multiple entier de la fréquence des éclairs, par exemple légèrement supérieure à $k N_e$.

Entre 2 éclairs consécutifs, séparés par $\frac{1}{N_e}$ s, le disque a effectué (k tours + angle α) ~~La rotation apparente~~ $k N_e \times \frac{1}{N_e}$

Donc $k 2\pi + \alpha = 2\pi N . \frac{1}{N_e}$ — idée élimination

$$\alpha = 2\pi \left(\frac{N - k N_e}{N_e}\right)$$

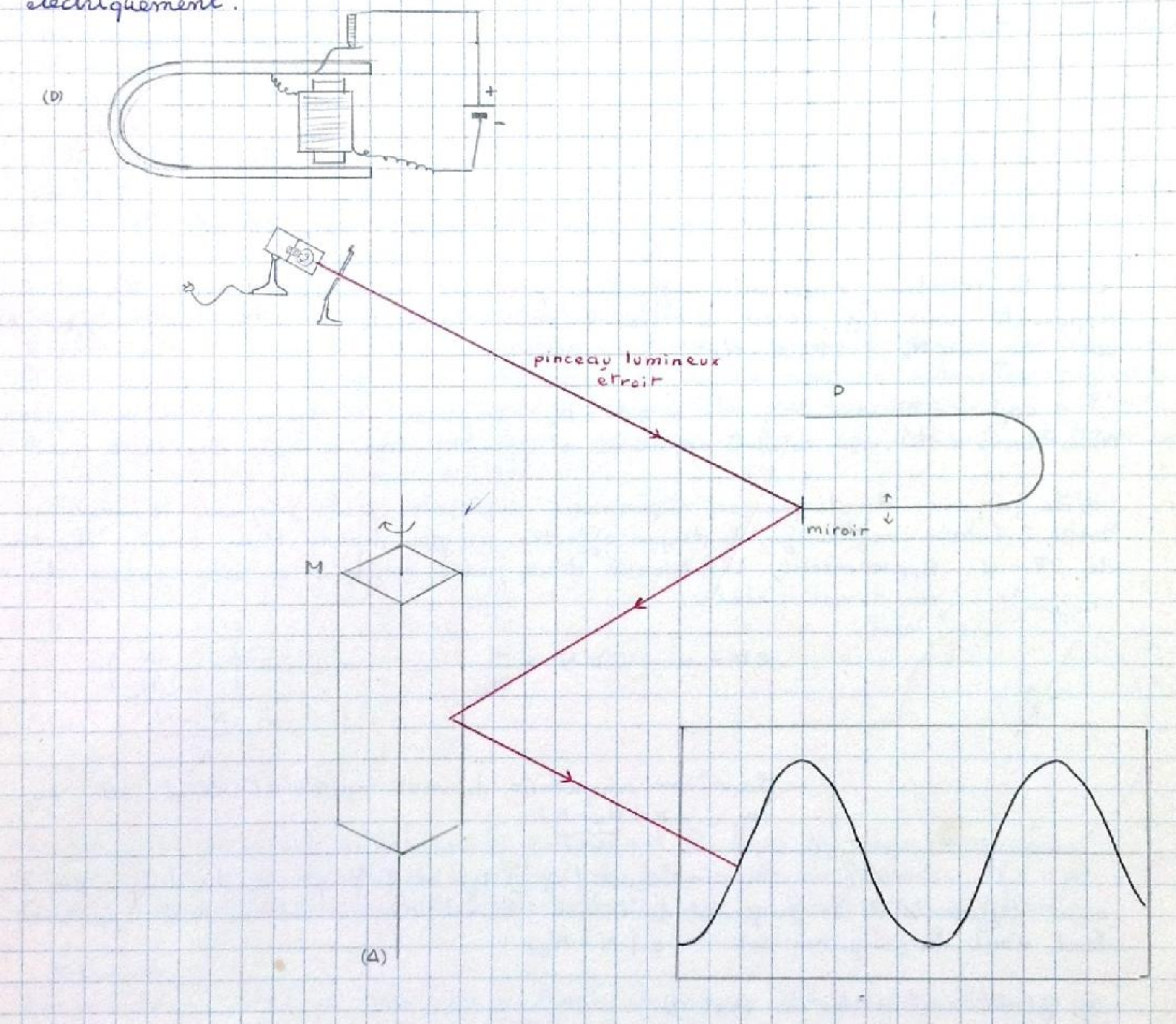
~~La rotat~~ mvt observé est encore un mvt apparent lent dont la fréquence est $\nu = N - k N_e$ et de sens du mvt réel.

On établirait de même que si la fréquence du disque est un peu inférieure à kN_e, le mvt observé est apparent lent, dont le sens est opposé à celui du mvt réel et dont la fréquence est $\nu = kN_e - N$.

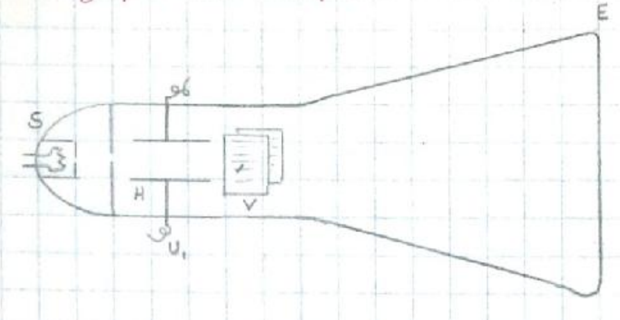
L'intérêt de la stroboscopie consiste dans la possibilité qu'elle offre d'observer au ralenti des mvts périodiques de fréquence élevée. Par exemple : mvt alternatif des pistons dans les cylindres de moteurs à explosion, mvt des cames, des culbuteurs, des pales d'hélices d'avions ou d'hélicoptères, des broches des machines à tisser.

Dispositif du miroir tournant

Illustrons ce dispositif par l'étude d'un exemple : on se propose d'étudier expérimentalement le mvt vibratoire des branches en acier d'un diapason entretenu électriquement.



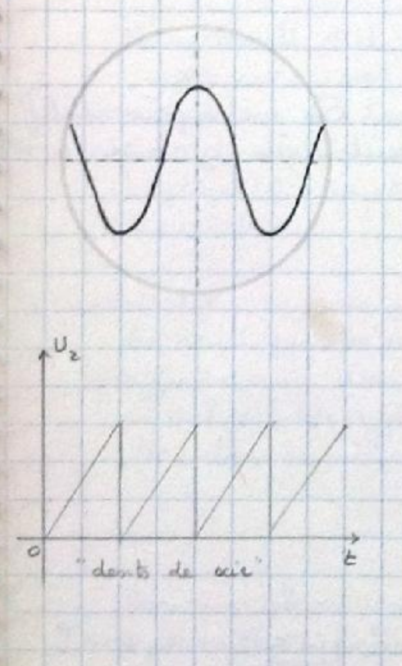
Le diapason étant au repos, et le miroir M tournant d'un mvt uniforme, la trace lumineuse du pinceau lumineux sur l'écran convenablement disposé décrit une droite d'un mvt uniforme. Cette droite est l'axe des temps (on réalise un balayage). Si maintenant, le miroir M étant entraîné d'un mvt uniforme autour de (Δ), les branches du diapason et le miroir m qui en est solidaire sont animés de vibrations verticales, la trace lumineuse observée sur l'écran est la courbe représentative en fct de la date de l'élongation du miroir m. La courbe observée est une sinusoïde ainsi, l'expérience montre (et la théorie la confirmerait) que les 2 branches du diapason sont animées de vibrations sinusoïdales.



Au fond d'un tube dans lequel règne un vide très poussé, un dispositif S qui ne sera pas explicité ici et que l'on appelera canon à électrons permet d'obtenir un pinceau homocinétique d'électrons. L'autre extrémité du tube est fermé par un écran fluorescent. Au point d'impact du pinceau électronique on observe une trace fluorescente ponctuelle que l'on appelle spot.

A l'intérieur du tube, on trouve les armatures planes et parallèles disposées horizontalement d'un condensateur puis les armatures planes et parallèles disposées verticalement d'un autre condensateur. Si l'on applique entre les armatures horizontales H une d.d.p. U_1, les électrons sont déviés dans le champs électrique suivant une trajectoire parabolique puis, à la sortie du champs reprennent une trajectoire rectiligne tangente à l'arc de parabole.

Le spot fluorescent qui, en l'absence de champ électrique se formait en O se forme au pt A_1 de l'axe y'y et la déviation OA_1 est proportionnelle à la ddp U_1 : $OA_1 = k_1 U_1$. Les armatures horizontales H sont les plaques de déviation verticale. De même, si, le condensateur H n'étant pas chargé, on applique une ddp U_2 aux plaques verticales V, le spot se forme au point A_2 de l'axe x'x et $OA_2 = k_2 U_2$. Si U_1 et U_2 sont appliquées simultanément, le spot se forme au point A (OA_2, OA_1). Un dispositif intérieur à l'appareil et appelé dispositif de balayage permet de faire en sorte que la ddp U_2 varie comme suit : U_2 croît linéairement, c'est-à-dire proportionnellement à la date, puis s'annule en un intervalle de temps très bref pratiquement négligeable pour reprendre ensuite une croissance linéaire, s'annuler instantanément et ainsi de suite. Cette tension U_2 est appelée fct en dents de scie. Le spot balay dans ces conditions l'axe x'x proportionnellement au temps. Ce dispositif de balayage est analogue à celui réalisé avec un miroir tournant. L'axe x'x devient un axe des temps.



Supposons que l'on souhaite avec cet appareil réaliser l'étude d'une fonction périodique. Aux bornes d'entrée des plaques de déviation verticale on applique une ddp U_1 à chaque instant proportionnelle à la grandeur périodique à mesurer. Par un réglage convenable de la fréquence du balayage, on obtient alors sur l'écran de l'oscillographe une courbe stable qui traduit les variations de la grandeur périodique étudiée. Celle-ci est par exemple une vibration sonore. Cette vibration est reçue sur la membrane d'un microphone. Celle-ci vibre périodiquement avec une fréquence égale à la fréquence de la vibration sonore et avec une amplitude à chaque instant proportionnelle à celle de la vibration sonore. Par un phénomène d'induction électromagnétique, ces vibrations périodiques de la membrane engendre dans la bobine de l'électroaimant du microphone une f.e.m. périodique de même fréquence. La ddp ainsi obtenue est appliquée aux plaques H. On peut observer sur l'écran une courbe traduisant les variations de la vibration sonore.

Représentation de Fresnel (Jean Augustin)

Soit une fonction sinusoïdale de la date $y = a\sin(\omega t + \varphi)$. A cette fonction on associe un vecteur $\overrightarrow{OA}$ de norme a, qui, dans le plan orienté, fait à la date t avec l'axe origine OX un angle $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA}) = \omega t + \varphi$.
Ce vecteur tourne dans ce plan orienté avec une vitesse angulaire constante ω. La projection orthogonale de son extrémité A sur l'axe $Y'Y$ perpendiculaire à OX a pour mesure algébrique $\overline{OA'} = a\sin(\omega t + \varphi)$. $\overline{OA'}$ représente la fct sinusoïdale $y = a\sin(\omega t + \varphi)$

Dans bien des cas on simplifie cette représentation en figurant ce vecteur à la date 0 :
$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA_0}) = \varphi$ (phase initiale)

Somme de 2 fonctions sinusoïdales de même période

Soient les fcts de t : (1) $y_1 = a_1\sin(\omega t + \varphi_1)$
(2) $y_2 = a_2\sin(\omega t + \varphi_2)$

On se propose de déterminer la fonction $y = y_1 + y_2$.
On peut traiter ce problème avec la représentation de Fresnel. A la fonction y_1 on associe le vecteur tournant $\overrightarrow{OA_1}$ de norme a_1 d'angle polaire $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA_1}) = \varphi_1$
A la fonction y_2 on associe le vecteur $\overrightarrow{OA_2}$ de norme a_2 et d'angle polaire $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA_2}) = \varphi_2$.

Les 2 vecteurs tournant ont même vitesse angulaire ω. Le vecteur $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}$ est représentatif de la fonction y. Le parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$ tourne sans se déformer. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est représentatif d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω, fonction que l'on peut écrire $y = a\sin(\omega t + \varphi)$ avec $a = \|\overrightarrow{OA}\|$. Il faut déterminer a et φ.

$$a^2 = \overrightarrow{OA_1}^2 + \overrightarrow{OA_2}^2 + 2\,a_1 a_2 \cos(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$tg\varphi = \frac{\overline{KA}}{\overline{OK}} = \frac{\overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HA}}{\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IK}} = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2}$$

* 2- méthode
On développe $y = y_1 + y_2$

$$y = a\sin\varphi\cos\omega t + a\cos\varphi\sin\omega t = a_1\sin\varphi_1\cos\omega t + a_1\cos\varphi_1\sin\omega t + a_2\sin\varphi_2\cos\omega t + a_2\cos\varphi_2\sin\omega t$$

$$= (a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2)\cos\omega t + (a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2)\sin\omega t$$

Relation vérifiée $\forall t$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a\sin\varphi = a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2 & (4) \\ a\cos\varphi = a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2 & (5) \end{cases}$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 (\cos\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_1)$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2}$$

φ n'est pas déterminé par sa seule tangente. Il faut associer la relation donnant $\operatorname{tg}\varphi$ à une quelconque des relations (4) ou (5).

Différence de phase entre les fonctions y_1 et y_2

Cette différence de phase est $\Phi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1)$

$\Phi = \varphi_2 - \varphi_1$

_ Si $\Phi = k 2\pi$, y_1 et y_2 sont en phase et l'amplitude de la fonction y est maximale : $a = a_1 + a_2$

_ Si $\Phi = (2k+1)\pi$, y_1 et y_2 sont en opposition de phase et l'amplitude de la fonction résultante est minimale : $a = |a_1 - a_2|$

26 Propagation d'un vibration sinusoïdale entretenue, dans un milieu élastique

Expérience illustrant le phénomène de propagation d'une vibration sinusoïdale transversale entretenue le long d'un milieu élastique à 1 dimension.

O M x ouate

tige rigide

poids tenseur très léger

(l'amortissement des vibrations empêchent la réflexion de celles-ci)

L'extrémité O de la corde reliée à l'une des branches du diapason entretenu électriquement est animé de vibrations sinusoïdales de pulsation ω de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, d'amplitude a. Ces vibrations s'effectuent perpendiculairement à la direction Ox de la corde : elles sont transversales. En outre, l'amortissement le long de Ox est négligeable. On stroboscope le phénomène. On voit la corde déformée suivant une sinusoïde.

Interprétation de l'expérience 1

On sait que la propagation d'une vibration dans un milieu élastique homogène s'effectue avec une célérité constante qui ne dépend que des conditions physiques de ce milieu. On appelle longueur d'onde la distance $\lambda = VT$ parcourue par la vibration dans ce milieu élastique pendant la durée d'une période.

$$\boxed{\lambda = VT = \frac{V}{N}}$$

Avec un choix convenable de la date 0, la fonction horaire des vibrations de l'extrémité O (source) peut s'écrire $y_0 = a \sin(\omega t) = a \sin \frac{2\pi}{T} t$

Si l'amortissement est négligeable et la célérité V, le point M situé à la distance $OM = x$ de la source répète le mvt de celle-ci avec un retard $\theta = \frac{x}{V}$.

L'élongation de M à la date t est égale à l'élongation prise par la source O à la date $t - \theta$

$$\underset{\text{date } t}{y_M} = a \sin \frac{2\pi}{T}(t - \theta)$$

$$y_M = a \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

$$y_M = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Cette fonction exprimant l'élongation à la date t d'un point M de la corde est une fonction sinusoïdale de la date. La période de cette fonction sinusoïdale est égale à T. En effet, si l'on considère les dates t_1 et $t_1 + T$, l'argument du sinus varie entre ces 2 dates de $2\pi\left[\frac{t_1+T}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] - 2\pi\left[\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] = 2\pi$.

La courbe représentative de cette fonction est appelée communément "sinusoïde des temps" pour le point M. On a figuré ci-dessous la sinusoïde représentant les vibrations de la source. La sinusoïde des temps du point M se déduit de celle-ci par une translation de vecteur $\vec{\theta}$ sur l'axe des temps.

On peut maintenant étudier la fct exprimée en (1) d'un autre point de vue. On se fixe la date et la variable est l'abscisse x de M. (1) exprime alors une fonction sinusoïdale de la variable x. Alors que dans le premier cas, la périodicité était temporelle, elle est ici spatiale. (1) où t est fixe et x variable exprime une fonction sinusoïdale de x de période λ. En effet, lorsque x passe de la valeur x_1 à la valeur $x_1 + \lambda$, l'argument du sinus varie de 2π. La longueur d'onde λ est encore appelée période dans l'espace. La courbe représentant les variations de l'élongation y_M en fonction de l'abscisse x à une date donnée est appelée sinusoïde des espaces. Dans l'expérience précédemment réalisée, la sinusoïde des espaces est précisemment la forme prise par le milieu à la date t. Cette sinusoïde se déplace sans se déformer le long de la corde avec la vitesse V.

Exprimons la différence des phases entre les mvts vibratoires de deux points M_1 et M_2 d'abscisse x_1 et x_2.

$$\Phi = \text{phase de } M_1 - \text{phase de } M_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

$$\Phi = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda}$$

Points vibrants en phase

Ssi $\Phi = k2\pi$ donc $2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = k2\pi \rightarrow d_2 - d_1 = k\lambda$

Deux points du milieu élastique vibrent en phase s'ils sont distant d'un multiple entier de la longueur d'onde

Pts vibrants en opposition de phase

Ssi $\Phi = (2k+1)\pi \rightarrow 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = (2k+1)\pi \rightarrow x_2 - x_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

Deux pts vibrent en opposition de phase s'il sont distants d'un multiple impair de la demi-longueur d'onde.

26 Postulat de la superposition des petits mvts 26

Supposons que dans un milieu élastique se propagent les vibrations issues de 2 sources S_1 et S_2. Sous l'action de la source S_1 agissant seule, le point M serait déplacé à la date t, par rapport à sa position d'équilibre, de l'élongation $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{y}_1$. Sous l'action de la source S_2 agissant seule, l'élongation du point M à la date t serait $\overrightarrow{M_0M_2} = \vec{y}_2$. Le postulat de la superposition des petits mvts énonce que sous l'action des 2 sources agissant simultanément l'élongation du point M à la date t est la somme $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_0M_2}$, $(\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2)$ des élongations composantes, et cela à la seule condition que celles-ci soient suffisamment petites.

Ce postulat peut être étendu au cas de n sources agissant simultanément. Suggéré par l'observation, il sera confirmé à postériori par l'ensemble de ses conséquences, qui, elles, pourront être soumises à la vérification expérimentale.

27 Etude du phénomène résultant de la superposition en tous points d'un milieu élastique des vibrations issues de 2 sources sinusoïdales synchrones et cohérentes.

Les vibrations issues des 2 sources seront de plus supposées de même direction (vibrations parallèles) et d'égale amplitude. On désigne ce phénomène par le terme d'interférences. En fait, la signification de ce terme est plus générale et l'on peut dire que 2 vibrations interfèrent en un point si elles se superposent en ce point. Nous emploierons donc ici ce terme d'interférences dans un sens restrictif.

Deux sources sont dites synchrones si elles sont de même fréquence, elles sont dites cohérentes si elles vibrent en phase.

Expérience

Deux pointes S_1 et S_2 solidaires d'une même tige fixée en l'une des branches d'un diapason entretenu électriquement affleurent à la surface plane et horizontale d'un liquide. Les deux pointes sont verticales. Lorsque le diapason vibre, elles constituent 2 sources vibratoires sinusoïdales synchrones et cohérentes de même direction (perpendiculaire à la surface du liquide) et d'égale amplitude. La cuve contenant le liquide étant transparente et placée sur une lanterne de projection, on peut observer sur un écran la surface du liquide. Celle-ci apparait sillonnée de rides hyperboliques de foyers S_1 et S_2 (on appelle hyperbole l'ensemble des points dont la différence des distances à 2 pts fixes est constante). Les 2 pts fixes s'appellent les foyers de l'hyperbole)

En outre, si l'on stroboscope le phénomène, on peut voir pour une fréquence convenable des éclairs 2 systèmes de rides circulaires centrées respectivement en S_1 et S_2 et se propageant à la surface du liquide sans se déformer, sans se gêner mutuellement.

Interprétation des résultats expérimentaux

Avec un choix convenable de la date 0, on peut exprimer la fct horaire des vibrations des 2 sources sous la forme : $y_{S_1} = y_{S_2} = a \sin \frac{2\pi}{T} t$

Considérons un point M du milieu élastique situé aux distances d_1 et d_2 de S_1 et S_2 respectivement et supposons négligeable l'amortissement de l'énergie vibratoire dans ce milieu élastique. Si la source S_1 existait seule, le point M répéterait le mvt de S_1 avec un retard $\theta_1 = \frac{d_1}{V}$ (V désignant la célérité des vibrations

transversales à la surface du liquide. L'élongation du pt M à la date t s'exprimerait par la fct horaire $y_1 = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right)$.

De même, si la source S_2 existait seule, le pt M répèterait le mvt de S_2 avec un retard $\theta_2 = \frac{d_2}{V}$ et la fct horaire du mvt de M s'écrirait :

$$y_2 = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)$$

Les 2 sources agissant simultanément, l'élongation de M à la date t a pour expression (cf postulat de la superposition des petits mvts chap 26)

$$y_M = y_1 + y_2 = a\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)\right]$$

$$= a\left(\sin p + \sin q\right)$$

$$= 2a \cos\frac{p-q}{2} \cdot \sin\frac{p+q}{2}$$

$$\boxed{y_M = 2a \cos\pi\frac{d_2-d_1}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1+d_2}{2\lambda}\right)}$$

L'amplitude de la vibration résultante au point M a pour expression :

$$\mathcal{A} = 2a\left|\cos\pi\frac{d_2-d_1}{\lambda}\right|$$

Cette amplitude dépend de la différence $\Delta = d_2 - d_1$ des distances respectives des 2 sources au point M (cette différence est appelée différence de marche au pt M). On va pouvoir définir notamment des ensembles de pts d'amplitude maximale et des ensembles de pts d'amplitude nulle.

Ensemble des pts d'amplitude maximale 2a

$\frac{\pi}{2} + k\pi$

Ces lieux sont définis par la condition : $\cos\pi\frac{d_2-d_1}{\lambda} = \pm 1$

$$\pi\frac{d_2-d_1}{\lambda} = k\pi$$

$$\boxed{d_2 - d_1 = k\lambda}$$

$k \in \mathbb{Z}$ peut prendre différentes valeurs que l'on peut d'ailleurs déterminer en remarquant que, si l'on pose $S_1S_2 = d$

$$|d_2 - d_1| \leq d$$

$$-d \leq k\lambda \leq +d$$

$$-\frac{d}{\lambda} \leq k \leq +\frac{d}{\lambda}$$

M, d_1, d_2, S_1, d, S_2

La relation $d_2 - d_1 = k\lambda$ défini, pour cet ensemble des valeurs de k, une famille d'hyperboles homofocales de foyers S_1 et S_2. La valeur particulière $k=0$ défini la médiatrice du segment S_1S_2.

Si, plus généralement on envisage la propagation des vibrations des 2 sources, dans un espace à 3 dimensions, homogène et isotrope, alors la même relation définit une famille d'hyperboloïdes de révolution qui peuvent être considérées comme engendrées par la révolution des hyperboles précédentes autour de l'axe S_1S_2

Ensemble des pts d'amplitude nulle.

$\mathcal{A} = 0$

$$\cos\pi\frac{d_2-d_1}{\lambda} = 0,\ (2k'+1)\frac{\pi}{2} = \pi\frac{d_2-d_1}{\lambda} \quad \mapsto \quad d_2 - d_1 = (2k'+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\boxed{d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}}$$

La différence $d_2 - d_1$ satisfait à la condition $|d_2 - d_1| < d$ donc $-d < d_2 - d_1 < d$

$$-\frac{2d}{\lambda} < 2k' + 1 < \frac{2d}{\lambda} \quad \text{donc} \quad -\frac{2d}{\lambda} - \frac{1}{2} < k' < \frac{2d}{\lambda} + \frac{1}{2}$$

La relation $\delta = d_2 - d_1 = (2k'+1)\frac{\lambda}{2}$ défini une famille d'hyperboles homofocales de foyers S_1 et S_2. Si la propagation a lieu dans un espace à 3 dimensions, une famille d'hyperboloïdes de révolution engendrées par la révolution des hyperboles précédentes autour de l'axe $S_1 S_2$ est ainsi définie.

Les pts d'amplitude nulle sur le segment $S_1 S_2$ sont définis par :

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = (2k'+1)\frac{\lambda}{2} \\ \text{et} \\ d_2 + d_1 = d \end{cases}$$

$$d_2 = \frac{d}{2} + (2k'+1)\frac{\lambda}{4}$$

Ces pts appelés "noeuds de vibration" de $S_1 S_2$ sont équidistants de $\frac{\lambda}{2}$. De même les pts d'amplitude maximale sur $S_1 S_2$ ou "ventres de vibrations" sont définis par

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = k\lambda \\ d_2 + d_1 = d \end{cases}$$

$$d_2 = \frac{d}{2} + k\frac{\lambda}{2}$$

Le milieu de $S_1 S_2$ est un "ventre de vibrations" et les ventres, comme les noeuds sont équidistants de $\frac{\lambda}{2}$.

Remarque : l'originalité et l'importance du phénomène d'interférences tient d'une part au fait qu'il est possible d'obtenir à partir de 2 sources vibratoires synchrones et cohérentes des lignes ou surfaces ensembles d'amplitude nulle, et d'autre part à sa généralité, c'est-à-dire à la possibilité de réaliser ce phénomène quelle que soit la nature de la grandeur à caractère vibratoire concernée : qu'il s'agisse de vibrations mécaniques (les lieux d'amplitude nulle seront alors des lieux d'immobilité), qu'il s'agisse d'ondes sonores (les lieux d'amplitude nulle seront des lieux de silence), qu'il s'agisse d'ondes lumineuses (les lieux d'amplitude nulle seront alors des lieux d'éclairement nul), qu'il s'agisse également d'ondes électromagnétiques ou ondes hertziennes.

Lignes ou surfaces équiphases.

La fct horaire de l'élongation du point M nous montre que, dans l'hypothèse où la fonction horaire des sources est écrite sous la forme $y_{S_1} = y_{S_2} = a \sin \frac{2\pi}{T} t$, la phase pour le point M sera $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}\right)$. Ce point M présente par rapport aux sources une différence de phase Φ :

$$\Phi = \frac{2\pi}{T} t - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}\right) = 2\pi \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}$$

Une condition nécessaire pour qu'un point vibre en phase avec les sources s'exprime par la relation : $\Phi = K 2\pi$

$$\frac{2\pi(d_1 + d_2)}{2\lambda} = K\,2\pi$$

$$d_1 + d_2 = 2K\lambda = K'\lambda \qquad K' = 2K$$

La relation $d_1 + d_2 = K'\lambda$ défini, dans le plan une famille d'ellipses homofocales de foyers S_1 et S_1, et dans l'espace, les ellipsoïdes engendrées par la révolution de ces ellipses autour de $S_1 S_2$. La condition exprimée ci-dessus est nécessaire mais non suffisante. Sans étudier dans tout le détail cette question, on peut en effet déjà noter qu'il faut exclure sur ces ellipses (ou ces ellipsoïdes) leurs intersections avec les lignes (ou surface) de repos.

Cas de 2 sources synchrones vibrant en opposition de phase.

Si l'on exprime la fct horaire de l'élongation de la source S_1 par exemple :

$$y_{S_1} = a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

La fct horaire de l'élongation de S_2 s'écrit :

$$y_{S_2} = a \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \pi\right)$$

Reprenons les calculs précédents pour les élongations composantes en M. On écrit

$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = a \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{d_2}{V}\right) - \pi\right] = a \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right) - \pi\right] = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)$$

La vibration résultante en M s'écrit :

$$y_M = y_1 + y_2 = a\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

Ensuite, on peut facilement poursuivre le calcul comme précédemment :

Remarque

On peut toutefois remarquer que les calculs sont allégés si l'on écrit pour marquer l'opposition de phase entre les sources

$$y_{S_1} = a \sin \frac{2\pi}{T} t \quad \text{et} \quad y_{S_2} = -a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

Il vient alors : $y_1 = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right)$

$$y_2 = -a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)$$

puis $y = y_1 + y_2 = a\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right) - \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)\right]$

$$= a(\sin p - \sin q)$$

$$= 2a \sin\frac{p-q}{2} \cos\frac{p+q}{2}$$

$$y = 2a \sin \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}\right)$$

L'amplitude de la vibration résultante s'écrit dans ce cas : $A = 2a \left|\sin \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda}\right|$

Les lieux d'amplitude maximale sont déduits par $\sin \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \pm 1$

$$\pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Les lieux des pts d'amplitude nulle sont déduits par $\sin \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = 0$

$$\pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = k\pi$$

$$d_2 - d_1 = k\lambda$$

Par rapport au cas précédent, il y a tout simplement permutation des lieux d'amplitude maximale et des lieux d'amplitude nulle.

Phénomène d'ondes stationnaires

Dans un précédent chapitre, nous avons envisagé le phénomène de propagation d'une vibration sinusoïdale transversale ou longitudinale dans un milieu élastique. Nous avions supposé des conditions expérimentales telles qu'il ne se produisait pas de phénomène de réflexion des ondes sur un obstacle. Nous envisagerons, dans ce chapitre, ce qui se produit dans le cas où cette réflexion a lieu. Des expériences réalisées à propos de la réflexion d'un ébranlement de courte durée (on dit encore d'un "signal") ont montré : a) que l'ébranlement réfléchit à même forme que l'ébranlement incident et qu'il se propage au sein du milieu élastique avec la même célérité. b) que la réflexion s'effectue avec changement de signe de l'élongation si elle a lieu sur un obstacle fixe c) que la réflexion s'effectue sans changement de signe de l'élongation si elle a lieu sur une extrémité libre. Ces résultats peuvent être extrapolés dans le cas de la propagation et de la réflexion sur un obstacle d'une vibration entretenue. Lorsqu'une telle réflexion se produit, il y a interférence en tous pts du milieu élastique des vibrations dues à l'onde incidente et des vibrations dues à l'onde réfléchie. En fait le phénomène peut être plus complexe à cause de réflexions multiples qui se produisent sur l'obstacle d'une part et sur l'extrémité source d'autre part. L'étude théorique que nous ferons après avoir réalisé une expérience se placera dans le cas idéal où se produit une seule réflexion sur l'obstacle. Cette étude élémentaire permettra cependant de rendre compte de la plupart des faits observés dans les phénomènes réels.

I Les vibrations sinusoïdales sont supposées transversales et la réflexion a lieu sur un obstacle fixe

Expérience de Melde.

lame métallique

Fil de coton

S

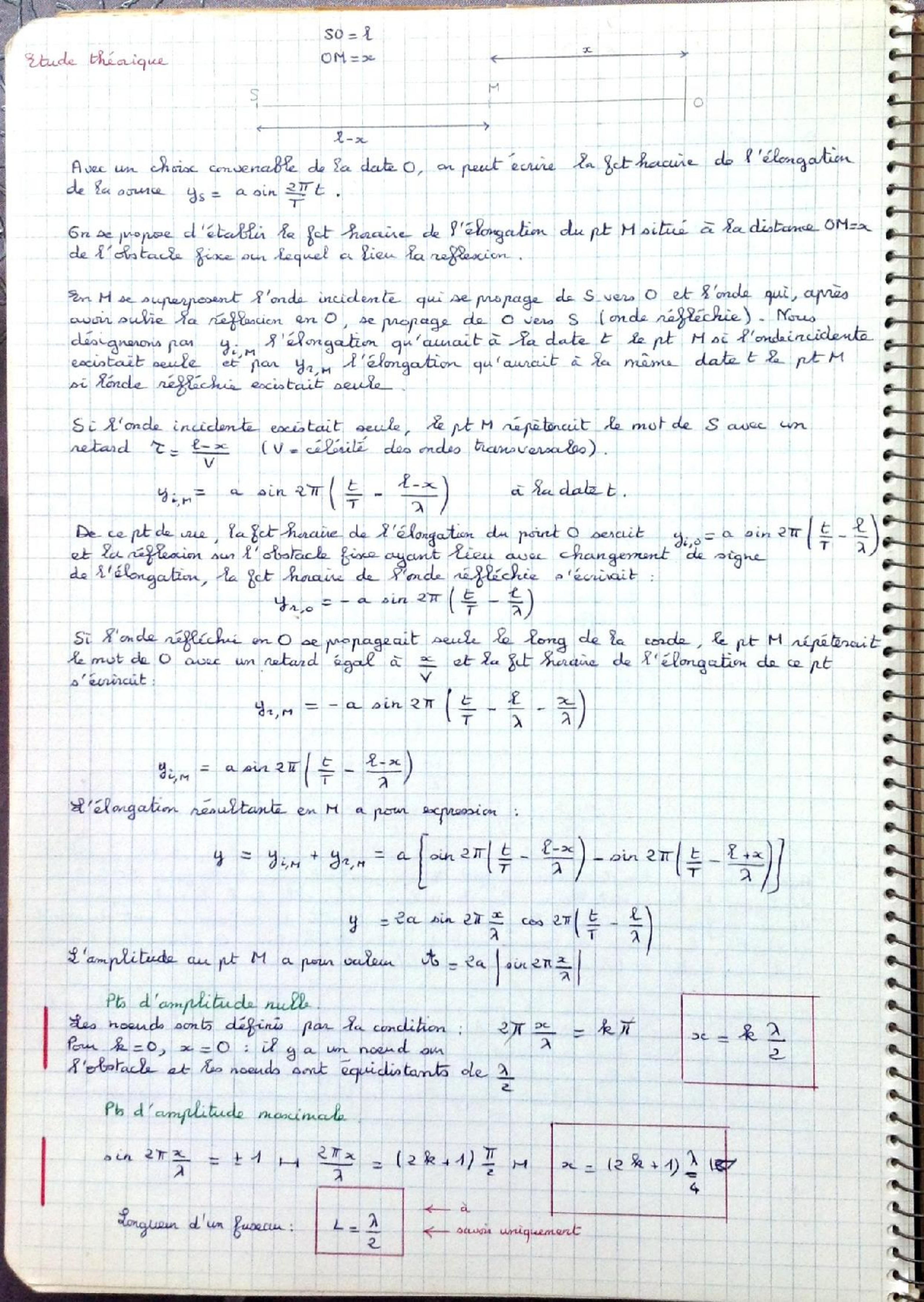
O

diapason entretenu électriquement

poids tenseur

Ayant donné une valeur déterminée au poids tenseur, on fait varier la longueur SO = l en déplaçant la lame métallique. Pour des valeurs convenables de l, la corde apparaît divisée en fuseaux d'égale longueur. Les pts extrémités de ces fuseaux sont des noeuds de vibration, les milieux des fuseaux sont des ventres de vibration. On observe que l'amplitude aux ventres est très supérieure à l'amplitude de la source.

On stroboscope le phénomène, et, pour une valeur convenable de la fréquence des éclairs on observe une sinusoïde. Cette sinusoïde se déforme sans se déplacer alors que dans l'expérience réalisée dans un précédent chapitre, elle se déplaçait sans se déformer. La stroboscopie nous montre en outre que tous les pts appartenant à un même fuseau vibrent en phase et qu'ils vibrent en opposition de phase avec les pts appartenant au fuseau voisin.



Etude théorique

$SO = \ell$
$OM = x$

Avec un choix convenable de la date 0, on peut écrire la fct horaire de l'élongation de la source $y_S = a \sin \frac{2\pi}{T} t$.

On se propose d'établir la fct horaire de l'élongation du pt M situé à la distance OM=x de l'obstacle fixe sur lequel a lieu la reflexion.

En M se superposent l'onde incidente qui se propage de S vers O et l'onde qui, après avoir subie la reflexion en O, se propage de O vers S (onde réfléchie). Nous désignerons par $y_{i,M}$ l'élongation qu'aurait à la date t le pt M si l'onde incidente existait seule et par $y_{r,M}$ l'élongation qu'aurait à la même date t le pt M si l'onde réfléchie existait seule.

Si l'onde incidente existait seule, le pt M répèterait le mvt de S avec un retard $\tau = \frac{\ell - x}{V}$ (V = célérité des ondes transversales).

$$y_{i,M} = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell - x}{\lambda} \right) \quad \text{à la date } t.$$

De ce pt de vue, la fct horaire de l'élongation du point O serait $y_{i,O} = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell}{\lambda} \right)$ et la reflexion sur l'obstacle fixe ayant lieu avec changement de signe de l'élongation, la fct horaire de l'onde réfléchie s'écrivait :

$$y_{r,O} = - a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell}{\lambda} \right)$$

Si l'onde réfléchie en O se propageait seule le long de la corde, le pt M répèterait le mvt de O avec un retard égal à $\frac{x}{V}$ et la fct horaire de l'élongation de ce pt s'écrivait :

$$y_{r,M} = - a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$y_{i,M} = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell - x}{\lambda} \right)$$

L'élongation résultante en M a pour expression :

$$y = y_{i,M} + y_{r,M} = a \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell - x}{\lambda} \right) - \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell + x}{\lambda} \right) \right]$$

$$y = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\ell}{\lambda} \right)$$

L'amplitude au pt M a pour valeur $A = 2a \left| \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$

Pts d'amplitude nulle

Les noeuds sont définis par la condition : $2\pi \frac{x}{\lambda} = k\pi$

$$x = k \frac{\lambda}{2}$$

Pour $k = 0$, $x = 0$: il y a un noeud sur l'obstacle et les noeuds sont équidistants de $\frac{\lambda}{2}$

Pts d'amplitude maximale

$\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1 \mapsto \frac{2\pi x}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \mapsto$

$$x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Longueur d'un fuseau : $L = \frac{\lambda}{2}$ ← à savoir uniquement

Ainsi la longueur d'un fuseau est égale à la demi-longueur d'onde. Dans cette étude théorique on trouve pour l'amplitude aux ventres la valeur 2a. Dans l'expérience réalisée, l'amplitude aux ventres était supérieure à 2a. 28

Dans le phénomène réel il se produit en fait des réflexions multiples en O d'une part et à l'extrémité source d'autre part et l'état vibratoire au pt M résulte de la superposition de toutes les ondes incidentes se propageant de S vers O et de toutes les ondes réfléchies se propageant de O vers S.

Dans la fonction horaire de l'élongation de M l'abcisse x de ce point n'intervient pas dans l'expression de la phase à la date t. On comprend dès lors que tous les pts appartenant au fuseau vibrent en phase. Mais lorsque l'on passe d'un noeud d'élongation au suivant, l'abcisse x varie de $\frac{\lambda}{2}$, l'argument du sinus varie de π et le sinus change de signe. Ainsi des pts appartenant à 2 fuseaux voisins vibrent en opposition de phase

II La réflexion des ondes incidentes a lieu sur une extrémité libre.

Dans ce cas la réflexion a lieu sans changement de signe de l'élongation, et, en reprenant les notations précedemment utilisées, nous écrirons :

$$y_{i,o} = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right)$$

$$y_{r,o} = y_{i,o}$$

$$y_{i,M} = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l-x}{\lambda}\right) \qquad y_{r,M} = a \sin \left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l+x}{\lambda}\right)\right.$$

$$y_{M(t)} = a\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l-x}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l+x}{\lambda}\right)\right]$$

$$y_M = 2a \cos\frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right)$$

$$\mathcal{A} = 2a\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$$

Ventres d'élongation

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \;\longmapsto\; \frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi \;\longmapsto\; x = k\frac{\lambda}{2}$$

Il y a un ventre sur l'obstacle et les ventres sont équidistants de $\frac{\lambda}{2}$.

Noeuds de vibration.

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \;\longmapsto\; \frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \;\longmapsto\; x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$$

III Condition à réaliser pour obtenir des ondes stationaires transversales sur une corde tendue.

Nous avons noté l'existence d'un noeud sur l'obstacle fixe, l'existence d'un noeud au voisinage immédiat de la source avec, éventuellement, un certaint nombre de noeuds intermédiaires :

$$\ell = k \frac{\lambda}{2} . \qquad (1)$$

Or $\lambda = \frac{V}{N}$. La célérité des ondes transversales sur une corde dépend de la tension F de cette corde et de sa masse linéique μ. On établit que la célérité V est liée à F et à μ par la relation :

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

il faut donc que (1) soit réalisé pour qu'il ait ph. ond. st.
λ fixé par N, F et μ
$\ell = k \frac{\lambda}{2}$ fixés

Alors, (1) :

$$\ell = k \frac{V}{2N} = \frac{k}{2N} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (2)$$

Il faut que (1) soit réalisée pour qu'il y ait un phénomène d'ondes stationaires, λ dépendant de N, F et μ. La relation (2) représente une condition nécessaire.

Hypothèse des vibrations lumineuses

La nature vibratoire de la lumière fut proposée au XVIIe siècle par le physicien hollandais Huygens qui jeta les bases de la théorie ondulatoire de la lumière. Du vivant de ce physicien et pendant la majeur partie du XVIIIe siècle, la théorie de l'émission due au physicien anglais Newton prévalu. Vers la fin du XVIIIe siècle, l'anglais Thomas Young qui étudie les phénomènes de diffraction de la lumière se pose en défenseur de la théorie ondulatoire mais celle-ci ne s'imposera qu'avec les travaux à la fois expérimentaux et théoriques du physicien et mathématicien français Fresnel qui soutint en 1918 un célèbre mémoire sur la diffraction de la lumière, mémoire dans lequel il dépasse largement le cadre du sujet proposé par un jury d'ailleurs hostile à la théorie ondulatoire. Dans ce mémoire, on trouve en particulier les célèbres intégrales de Fresnel qui permettent de rendre compte avec une remarquable précision de l'intensité de l'éclairement en tous pts d'une figure de diffraction. On y trouve également la description d'une expérience d'interférences lumineuses. La théorie ondulatoire s'impose avec Fresnel qui établira en outre dans son interprétation des phénomènes de polarisation de la lumière la transversalité des radiations lumineuses. Nous résumons ici les pts essentiels de cette théorie : toutes les radiations monochromatiques composant la lumière blanche se propagent dans le vide avec la même célérité. Cette célérité fera l'objet au cours des XIX et XXe siècles de déterminations de plus en plus précises. On la connait actuellement avec une incertitude inférieure à 0,4 $km.s^{-1}$. Nous retiendrons pour sa valeur approchée :

$$c \simeq 3.10^8 \ m.s^{-1} \qquad \lambda_0 = \frac{c}{\nu}$$

Chaque radiation monochromatique peut être caractérisée par sa fréquence ν ou, de préférence, par sa longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$. Dans un milieu transparent homogène, d'indice de réfraction n pour la radiation considérée, la célérité de la lumière est liée par la célérité dans le vide par la relation

$$v = \frac{c}{n}$$

La longueur d'onde dans le milieu d'indice n de la radiation considérée est :

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu} \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Les longueurs d'onde des radiations composant la lumière visible sont comprises entre 0,4 µm et 0,75 µm environ. 0,4 µ.m est la limite inférieure des longueurs d'ondes des radiations violettes, 0,75 µm la limite supérieure des longueurs d'onde des radiations rouges.

On peut caractériser chaque radiation lumineuse par une grandeur vectorielle fct sinusoïdale de la date et que l'on peut appeler le "vecteur lumineux". Lorsque le physicien anglais Maxwell aura élaboré la théorie électromagnétique et que, quelques 30 années plus tard le physicien allemand Hertz aura montré expérimentalement l'existence des ondes électromagnétiques prévue par Maxwell, il sera alors établi que le vecteur lumineux n'est autre que le vecteur champ électrique de l'onde électromagnétique. Le plan de vibration du vecteur lumineux est normal à la direction de propagation (transversalité). Quant à la valeur de l'éclairement en 1 pt, on établi qu'elle est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration en ce point.

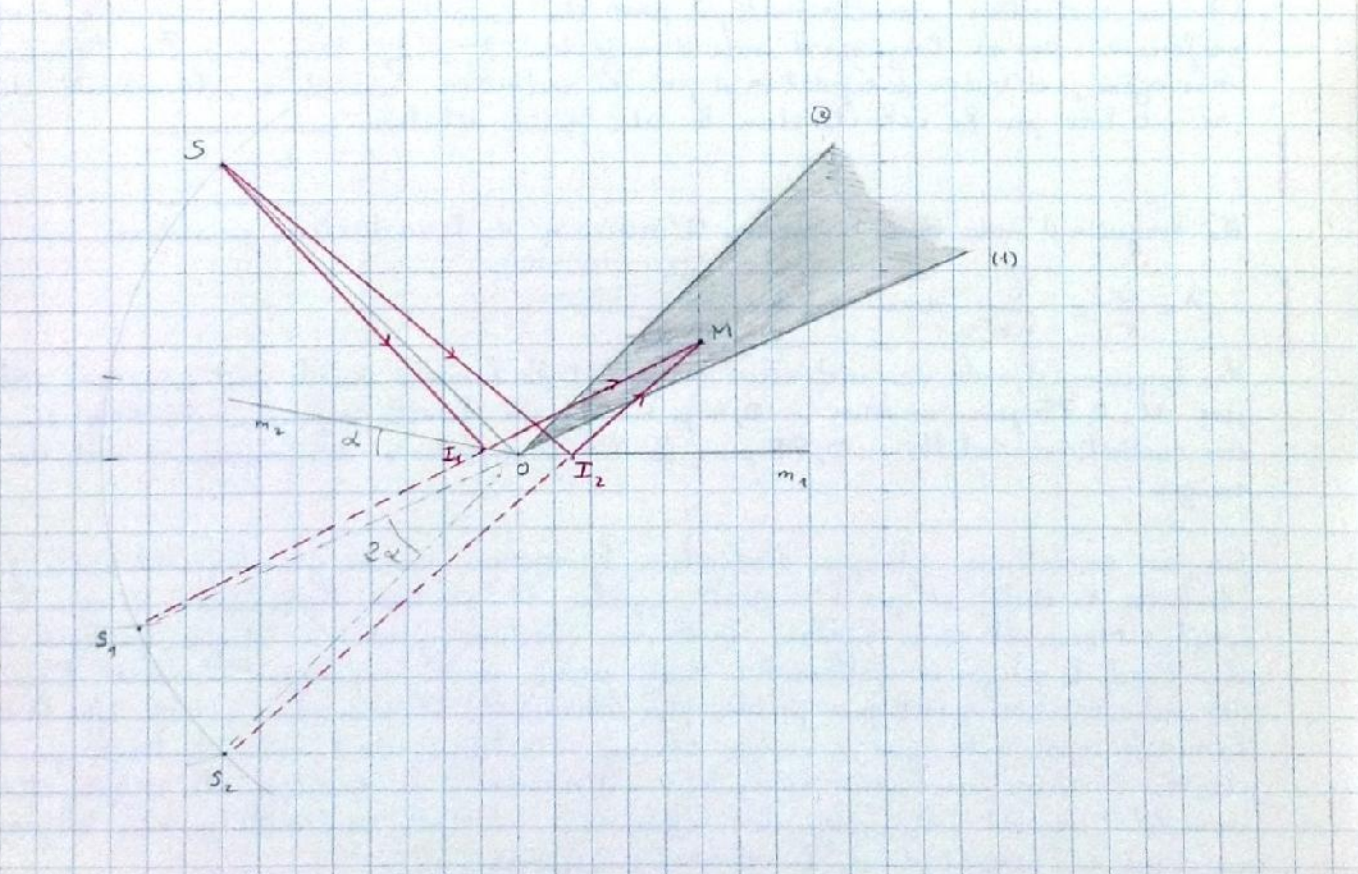
On peut penser à la possibilité de réaliser des interférences lumineuses en utilisant dans une salle obscure 2 sources lumineuses monochromatique de même longueur d'onde. Or l'expérience conduit à un échec. L'éclairement obtenu est uniforme. 2 attitudes possibles en face de cet échec : La première consiste à penser que l'hypothèse de départ relativement à la nature du phénomène lumineux est fausse. On ne peut retenir une telle attitude du fait de l'existence du phénomène de diffraction qui prouve ce caractère ondulatoire. La 2- attitude consiste à penser que si le caractère synchrone des 2 sources est bien réalisé, la cohérence des phases ne l'est pas, c'est-à-dire que les phases des 2 sources varient constamment de façon absolument aléatoire et indépendante. C'est une telle démarche de pensée qui a conduit Fresnel à l'idée de partir d'une source unique et de diviser le faisceau issu de cette source unique en 2 faisceaux présentant une région commune. En d'autres termes, un tel dispositif appelé "diviseur d'ondes" donne d'une source monochromatique ponctuelle unique S deux images S_1 et S_2 et l'on peut considérer que les 2 faisceaux qui interfèrent dans leur région commune proviennent de 2 sources synchrones S_1 et S_2 pour lesquelles la cohérence de phase est nécessairement réalisée.

Expérience des miroirs de Fresnel

La région commune aux 2 faisceaux est très étroite, les images S_1 et S_2 sont très proches. Le segment S_1S_2 est assimilable à l'arc $\widehat{S_1S_2}$.

$OS = d$

$S_1S_2 = 2d\alpha$ (α en rd)



Les 2 rayons réfléchis qui interfèrent en M à la région commune aux 2 faisceaux correspondent aux rayons incidents SI_1 et SI_2 les directions S_1M et S_2M sont infiniment voisines et l'on peut dire que les vibrations qui interfèrent au pt M sont parallèles. Toutes les conditions nécessaires à la réalisation du phénomène d'interférence sont satisfaites.

l'état vibratoire au point M, c'est-à-dire plus précisemment l'amplitude de la vibration résultante en ce point et, par suite, l'éclairement en ce point ne dépendent que de la différence de marche $\delta = (SI_2 + I_2M) - (SI_1 + I_1M)$

$$\delta = (S_2I_2 + I_2M) - (S_1I_1 + I_1M)$$

$$\delta = S_2M - S_1M$$

Si au pt M l'éclairement $\delta = k\lambda$, l'éclairement est maximal. Si $\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, l'éclairement est nul. La relation $\delta = k\lambda$ définie une famille d'hyperboloïdes de révolution d'axe S_1S_2. Sur l'écran convenablement disposé, les intersections de ces hyperboloïdes par le plan de l'écran sont des arcs d'hyperboles, mais compte tenu de l'étroitesse de la zone d'interférences, ces hyperboles ne sont observables qu'au voisinage de leurs sommets où, très aplaties, elles apparaissent pratiquement rectilignes. De même la relation $\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ défini une famille d'hyperboloïdes de révolution et les intersections de ces hyperboloïdes par le plan de l'écran sont des franges obscures elles aussi pratiquement rectilignes. Sur l'écran, on voit donc en alternance franges brillantes et franges obscures. Pratiquement, pour que le phénomène soit plus lumineux on utilise au lieu d'une source ponctuelle une fente source disposée parallèlement à l'arête commune des 2 miroirs et fortement éclairées. Le plan médiateur de S_1S_2 est un plan de symétrie pour ce dispositif interférentiel. L'écrant est disposé perpendiculairement à ce plan de symétrie et parallèlement à l'arête commune des 2 miroirs, donc parallèlement à la fente source.

Calcul de la différence de marche en M.

On dit parfois que le dispositif des miroirs de Fresnel constitue un dispositif interférentiel à franges non localisées. On exprime par là le fait que, pour observer des franges d'interférence sur un écran, il sufit de disposer l'écran de telle sorte qu'il coupe la région commune aux 2 faisceaux. Mais la position de l'écran n'est pas localisée dans un plan déterminé. Il existe d'autres dispositifs interférentiels à franges non localisées mais quelque soit le dispositif envisagé, le principe en est toujours le même : à partir d'une source monochromatique unique S, on réalise soit par réflexion, soit par diffraction ou de toute autre façon 2 images S_1 et S_2. Quel que soit le dispositif utilisé, la distance $S_1S_2 = a$ de ces 2 sources synchrones est très petite (de l'ordre du millimètre. Le plan médiateur de S_1S_2 est un plan de symétrie pour le dispositif. L'écran est disposé perpendiculairement à ce plan de symétrie qu'il coupe suivant une droite de trace O. Sur cet écran, la zone d'interférence est toujours très petite, et si M appartient à cette zone d'interférence, la distance $OM = x$ est au plus de quelques cm. Comme la distance D des sources S_1 et S_2 à l'écran peut être de l'ordre du mètre ou de plusieurs mètres, a et x sont toujours très petits devant D.

Calculons $\delta = S_2M - S_1M = d_2 - d_1$

$$S_1M^2 = S_1H^2 + HM^2 \qquad S_2M^2 = S_2K^2 + KM^2$$

$$d_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \qquad d_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$d_1^2 = D^2\left[1 + \frac{(x-\frac{a}{2})^2}{D^2}\right] \quad \longrightarrow \quad d_1 = D\left(1 + \frac{(x-\frac{a}{2})^2}{D^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

le rapport $\frac{(x-\frac{a}{2})^2}{D^2}$ est un ε devant 1.

$$d_1 \simeq D\left(1 + \frac{(x-\frac{a}{2})^2}{2D^2}\right)$$

On établirait de même

$$d_2 \simeq D\left(1 + \frac{(x+\frac{a}{2})^2}{2D^2}\right)$$



$$\delta = d_2 - d_1 = \frac{1}{2D}\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

$$\delta = \frac{1}{2D} \cdot 2ax$$

$$\boxed{\delta \simeq \frac{ax}{D}}$$

Eclairement en M

1% Position des franges d'éclairement maximal.

$$\delta = \frac{ax}{D} = k\lambda \qquad x = k\frac{\lambda D}{a} = ki \qquad \boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

en posant $i = \frac{\lambda D}{a}$

Pour $k = 0$, $x = 0$. Au centre O de la figure d'interférences, on observe une frange brillante, on l'appelle frange brillante centrale. Les franges brillantes sont équidistantes de $i = \frac{\lambda D}{a}$. i est appelé "interfrange".

2% Positions des franges d'éclairement nul (franges obscures)

Elles sont données par la condition :

$$\delta = \frac{ax}{D} = (2k'+1)\frac{\lambda}{2} \quad \longmapsto \quad x = (2k'+1)\frac{\lambda D}{2a} = (2k'+1)\frac{i}{2}$$

Les premières franges obscures de part et d'autre de la frange brillante centrale sont à la distance $\frac{i}{2}$ de celle-ci, et elles sont équidistantes de i, comme les franges brillantes.

3% Expression de l'éclairement en un pt quelconque

Désignons par b l'amplitude des vibrations pour chaque source. Répétant ce que nous avons écrit à propos du phénomène d'interférences étudié en mécanique, nous pouvons exprimer la vibration résultante au pt M par la fct horaire.

$$y_M(t) = 2b \cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1 + d_2}{2\lambda}\right)$$

L'amplitude de la vibration résultante au pt M est :

$$A = 2b\left|\cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda}\right|$$

L'éclairement $\mathcal{E}$ au pt M est proportionnelle au carré de l'amplitude, ce que l'on peut écrire :

$$\mathcal{E} = K A^2 = 4Kb^2 \cos^2 \pi\frac{\delta}{\lambda}$$

$$\mathcal{E} = 4Kb^2 \cos^2 \pi \frac{ax}{\lambda D}$$

$$\mathcal{E} = 4Kb^2 \cos^2 \pi \frac{x}{i}$$

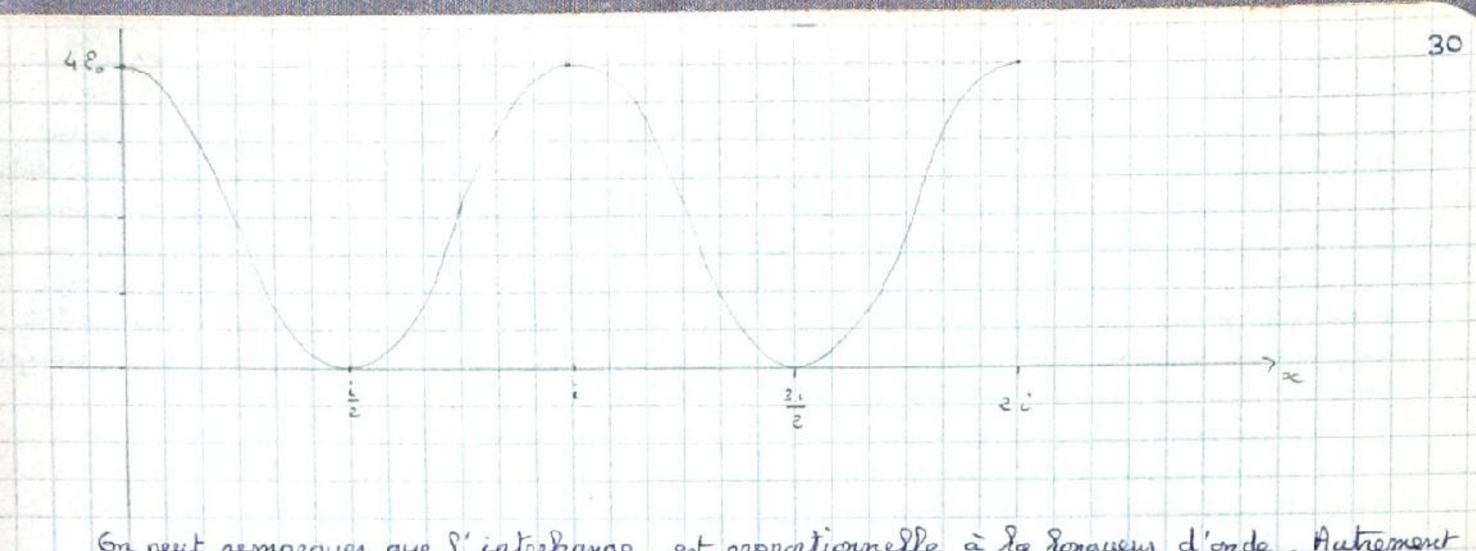
Or l'éclairement donné par une source seule serait : $\mathcal{E}_0 = Kb^2$

$$\mathcal{E} = 4\mathcal{E}_0 \cos^2 \pi \frac{x}{i} \qquad \text{on sait que} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

donc $$\mathcal{E} = 4\mathcal{E}_0 \frac{1 + \cos\frac{2\pi x}{i}}{2}$$

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0\left(1 + \cos 2\pi\frac{x}{i}\right)$$

L'éclairement varie entre les valeurs extrêmes 0 et $4\mathcal{E}_0$. $\mathcal{E}$ est fct sinusoïdale de l'abscisse x de période spatiale égale à l'interfrange i.



On peut remarquer que l'interfrange est proportionnelle à la longueur d'onde. Autrement dit, elle croît lorsqu'on passe des radiations violettes aux radiations rouges.

Interférences en lumières blanche

On sait que la lumière blanche est la synthèse d'une infinité de lumières monochromatiques. Or des radiations de longueur d'onde différente ne peuvent interférer. Chaque radiation composant la lumière utilisée donnera donc sur l'écran d'observation son propre système de frange, et comme l'interfrange croît du violet au rouge, ces systèmes de franges empièteront les uns sur les autres. Au point O, centre de la figure d'interférence, la différence de marche est nulle pour toutes les radiations et chacune d'elle se présente donc en O avec un maximum d'intensité lumineuse. Par suite, la frange brillante centrale est blanche.

Le maximum de sensibilité de l'œil a lieu pour la couleur jaune. De ce fait, l'œil perçoit nettement de part et d'autre de la frange centrale blanche une frange brillante jaune (la première). La première franges brillantes violettes s'observe entre la frange centrale et cette première frange jaune, la première frange brillante rouge se forme au delà de la frange brillante jaune. Ainsi, les 2 premières franges jaunes que l'on peut observer de part et d'autre de la frange centrale apparaissent irisées de violet sur leur bord intérieur et de rouge sur leur bord extérieur. Mais au fur et à mesure que l'on s'écarte davantage de la frange brillante centrale, l'empiètement des différents systèmes de franges les un sur les autres et le brouillage chromatique qui en résulte sont tels qu'en un pt quelconque de la région considérée, un assez grand nombre de radiation dont les teintes sont assez bien échelonnées du violet au rouge dans le spectre se présente pratiquement avec un maximum d'intensité et la synthèse de leur couleur se traduit, en ces points, par une teinte blanche plate. Cette teinte blanche plate est appelée "blanc d'ordre supérieur" par allusion à l'ordre d'interférence $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{k\lambda}{\lambda} = k$ qui croît avec la différence de marche δ et par suite qui croît lorsqu'on s'écarte de la frange centrale. (franges brill)

En résumé, si l'on interfère en lumière blanche, on observe une frange brillante centrale blanche, de part et d'autre de celle-ci quelques franges brillantes jaunes assez nettes mais présentant des irisations puis, au delà le "blanc d'ordre supérieur"

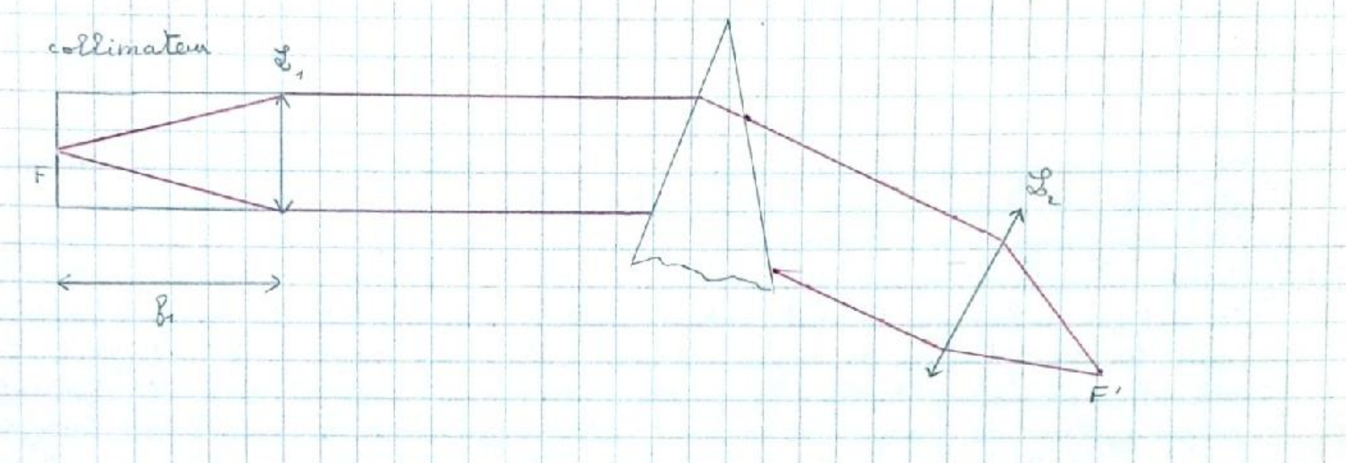
Analyse du blanc d'ordre supérieur

Plaçons nous en un point quelconque du blanc d'ordre supérieur, point situé à la distance $OM = x$ de la frange brillante centrale. En ce point, un certain nombre de radiations sont éteintes. Ce sont celles pour lesquelles la différence de marche $\delta = \frac{ax}{D}$ est égale à $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$.

$$\frac{ax}{D} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad \vdash \quad \lambda = \frac{2}{(2k+1)} \cdot \frac{ax}{D}.$$

On peut se proposer de déterminer expérimentalement les longueurs d'onde des radiations éteintes en ce point. Pour cela, on utilise un spectroscope. Rappelons brièvement le principe de cet appareil.

Un spectroscope comporte 2 lentilles convergentes et un prisme. La première lentille convergente est fixée à l'extrémité d'un tube cylindrique dont la longueur est égale à la distance focale f_1 de cette lentille. L'autre extrémité est fermée par un diaphragme porteur d'une fente F horizontale au foyer principal objet de la lentille $\mathcal{L}_1$. La fente F est fortement éclairée et la lentille $\mathcal{L}_1$ donne du faisceau lumineux issu de F un faisceau parallèle à l'axe principal de $\mathcal{L}_1$. Ce faisceau est reçu sur un prisme, où il est dévié vers la base du prisme. Si la lumière reçue de F est monochromatique, on obtient, à la sortie du prisme un faisceau parallèle. Ce faisceau est reçu sur une lentille convergente $\mathcal{L}_2$ de telle sorte que son axe principal



soit parallèle au faisceau. Le faisceau qui émerge de $\mathcal{L}_2$ converge en F', foyer principal image de la lentille $\mathcal{L}_2$. Si l'on place un écran dans le plan focal image de $\mathcal{L}_2$, on observe une trace lumineuse rectiligne horizontale parallèle à la fente F. C'est l'image de F à travers le spectroscope. On peut également observer cette image à l'aide d'un oculaire.

Si maintenant, la fente F est éclairée en lumière blanche, le prisme réalise la dispersion de la lumière blanche. En effet, la déviation par le prisme croît avec l'indice de réfraction de la substance qui le constitue, or cet indice de réfraction croît du rouge au violet. La déviation croît du rouge au violet. Il se forme donc, dans le plan focal image de $\mathcal{L}_2$ une infinité d'images monochromatiques de la fente F.
On observe dans le plan focal de la lentille $\mathcal{L}_2$ le spectre continu de la lumière blanche.

Ayant réalisé des interférences lumineuses en lumière blanche, supprimons l'écran sur lequel est observée la figure d'interférences et disposons en un point M du blanc d'ordre supérieur, parallèlement à la frange brillante centrale, la fente F du spectroscope.

Il est évident que les radiations qui sont éteintes au point M ne pourront donner dans le plan focal image de $\mathcal{L}_2$ une image de la fente F. A la place de ces images, on observera autant de raies noires. On les appelle "cannelures noires" et le spectre observé sillonné de cannelures est appelé spectre "cannelé".

Le spectroscope étant étalonné en longueur d'onde, on peut lire dans l'appareil les longueurs d'ondes des radiations éteintes au point M du blanc d'ordre supérieur.

Translation d'un système de franges

Ayant réalisé une expérience d'interférences lumineuses à franges non localisées et en lumière monochromatique, interposons sur le faisceau issu de l'une des sources (S_1 par exemple) une lame transparente homogène à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice de réfraction n pour la radiation considérée. Avant interposition de la lame, la différence de marche au pt M situé à la distance x de la frange centrale est $\delta = \frac{ax}{D}$.

La célérité v de la lumière dans un milieu transparent homogène d'indice de réfraction n est liée à la célérité c de la lumière dans le vide par la relation :

$$v = \frac{c}{n}$$

Le temps mis par la lumière issue de S_1 pour parcourir le trajet de longueur e dans le milieu d'indice n : $t = \frac{e}{v} = \frac{ne}{c}$

Pendant le même intervalle de temps t, la lumière parcourrait dans le vide la distance $e' = ne$. L'interposition de la lame sur le trajet du faisceau issu de S_1 se traduit pour ce faisceau par une augmentation de parcours $ne - e$ c'est à dire $(n-1)e$.

La différence de marche en M est $\delta' = d_2 - (d_1 + (n-1)e)$

$$\delta' = \frac{ax}{D} - (n-1)e$$

La nouvelle position de la frange brillante centrale est donnée par $\delta' = 0$.
La frange brillante centrale a subi la translation $OO' = x_0$ telle que

$$\frac{ax_0}{D} = (n-1)e \qquad x_0 = \frac{(n-1)eD}{a}$$

Si l'on a repéré initialement la position de la frange brillante centrale, on peut voir lors de l'interposition de la lame un certain nombre de franges défiler devant cette position. En comptant le nombre de franges qui défilent, on peut évaluer la translation x_0 de la frange centrale, ce qui permet, si l'on connait l'indice de réfraction n, d'en déduire l'épaisseur de la lame, ou, inversement, si l'on connait cette épaisseur, d'en déduire l'indice de réfraction. Il est à noter que la translation s'effectue du coté où on a interposé la lame

Rappel concernant quelques notions d'électricité et d'électromagnétisme.

Condensateurs

Un condensateur est formé de 2 conducteurs séparés par une certaine épaisseur d'isolant. Les 2 conducteurs sont les armatures du condensateur. L'isolant est encore appelé le diélectrique. Schéma conventionnel

1) Charge et décharge d'un condensateur.

g = galvanomètre monté en balistique (lorsqu'un galvanomètre monté en balistique est traversé par un courant de courte durée, le cadre du galvanomètre reçoit une impulsion, dévie d'un certain angle puis revient rapidement au 0, et sa déviation est proportionnelle à la quantité d'électricité Q qui a traversé le cadre).

Contact en 1, g dévie, puis revient au zéro. Contact en 2, g dévie en sens inverse, d'une quantité égale puis revient au 0. Contact en 1, le condensateur s'est chargé, il a pris une charge Q. Le transport de charge a cessé lorsque la ddp aux bornes du condensateur est devenue égale à la f.e.m. du générateur. Il y a eu transport, à travers les fils de connection de n électrons de l'armature A sur l'armature B. A a pris une charge +ne, et B une charge −ne, (e > 0). Contact en 2 : le condensateur se décharge dans la résistance R du fait du transport des n électrons de B sur A

2) Étude expérimentale des variations de la charge du condensateur en fonction de la ddp entre ses armatures.

(*) On compte positivement l'intensité du courant induit s'il produit une induction magnétique dans le sens de $\vec{B}$. On compte positivement la f.e.m. d'induction si elle donne naissance à un courant de sens positif.

$Q = CU$ C est la capacité du condensateur (C en farad F)

Sous multiple : nano, pico ($10^{-9}F$, $10^{-12}F$)

Phénomène d'induction électromagnétique

1) Rappel de la définition du flux d'induction magnétique.

Soit une surface plane d'aire S. On choisit sur le pourtour de cette surface un sens positif de parcours arbitraire et l'on oriente la normale à la surface en fonction de ce sens positif en convenant, par exemple, que le sens positif adopté sera celui dans lequel progresse un tire bouchon quand on le fait tourner dans le sens positif. Cette surface est supposée toute entière immergée dans un champs magnétique uniforme d'induction $\vec{B}$. Le vecteur $\vec{B}$ fait avec la normale un angle α. Le flux d'induction magnétique à travers cette surface est par définition.

$$\Phi = BS\cos\alpha \quad (*)$$

Si l'on introduit un vecteur S de même direction et de même sens que la normale, et dont la norme est proportionnelle à l'aire S, il vient :

$$\Phi = \vec{B}.\vec{S}$$

Dans le cas le plus général, la surface S n'est pas plane et le champs magnétique n'est pas uniforme. Si l'on considère sur une telle surface un élément dS suffisamment petit pour être assimilable à un élément de surface plane et pour que le champs magnétique $\vec{B}$ puisse être considéré comme uniforme pour toute l'étendue de cet élément, le flux élémentaire d'induction magnétique à travers cet élément a pour expression : $B\,dS\cos\alpha = d\Phi$

Le flux, à travers toute la surface considérée est généralement calculable par intégration.

L'unité de flux d'induction magnétique est le Weber : (Wb).

2) Phénomènes d'induction électromagnétique

* Expérience fondamentale.

On enfonce l'aimant dans la bobine : g dévie puis revient au zéro. On retire l'aimant de la bobine, g dévie en sens inverse puis revient au 0. Si l'on change de pôles d'aimant, on observe encore ces déviations mais les sens sont inversés par rapport au cas précédent.

* Loi du phénomène : Toute variation du flux d'induction magnétique à travers un circuit crée une f.e.m. qui, si le circuit est fermé, engendre un certain courant. La f.é.m est appelée f.e.m. induite, et le courant qui en est la conséquence est appelé courant induit. fem induite et courant induit sont temporelles. Leur durée est celle de la variation de flux. La f.e.m. induite et le courant induit obéissent à une loi de modération. On peut remarquer que le courant induit est créateur d'un ~~fon~~ champs magnétique dont les lignes d'induction traversent nécessairement le circuit. Il en résulte un flux d'induction magnétique. Ce flux, qui est crée par le courant induit est parfois appelé "flux induit". La loi de modération peut s'énoncer ainsi :

"Le courant induit est d'un sens tel que le flux induit tend à ~~s'im~~ s'opposer aux variations du flux inducteur". (Loi de Lenz)

Nous avons vu que pour compter algébriquement les flux d'induction magnétique on choisi un sens positif de parcours. La variation $\Delta\Phi$ du flux inducteur s'exprime elle aussi, algébriquement, et le signe du courant induit sera donné en fonction du sens positif arbitraire. La f.e.m. induite aura le signe du courant induit. La loi de modération s'exprime alors dans le fait que f.em induite E et variation $\Delta\Phi$ du flux inducteur sont toujours de signe contraire.

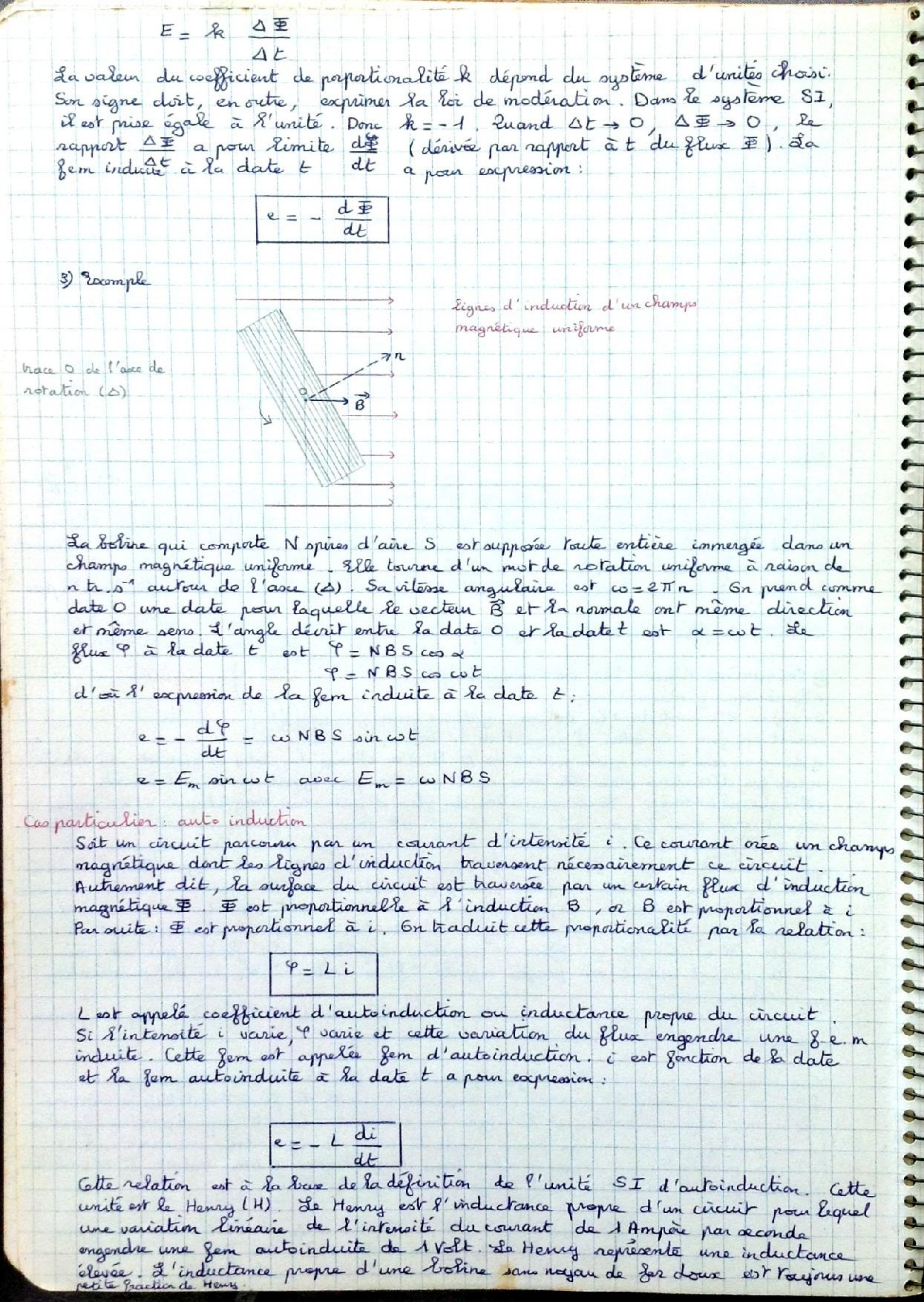
Une étude expérimentale montre que, si, entre les dates t et $t+\Delta t$, le flux inducteur passe de la valeur Φ à la valeur $\Phi + \Delta\Phi$, la f.e.m. induite moyenne entre ces 2 dates peut s'exprimer correctement par la relation :

$$E = k \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

La valeur du coefficient de proportionalité k dépend du système d'unités choisi. Son signe doit, en outre, exprimer la loi de modération. Dans le système SI, il est prise égale à l'unité. Donc $k = -1$. Quand $\Delta t \to 0$, $\Delta \Phi \to 0$, le rapport $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ a pour limite $\frac{d\Phi}{dt}$ (dérivée par rapport à t du flux Φ). La fem induite à la date t a pour expression :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

3) Exemple



La bobine qui comporte N spires d'aire S est supposée toute entière immergée dans un champs magnétique uniforme. Elle tourne d'un mvt de rotation uniforme à raison de n tr.s⁻¹ autour de l'axe (Δ). Sa vitesse angulaire est $\omega = 2\pi n$. On prend comme date 0 une date pour laquelle le vecteur $\vec{B}$ et la normale ont même direction et même sens. L'angle décrit entre la date 0 et la date t est $\alpha = \omega t$. Le flux φ à la date t est $\varphi = NBS \cos \alpha$

$$\varphi = NBS \cos \omega t$$

d'où l'expression de la fem induite à la date t :

$$e = - \frac{d\varphi}{dt} = \omega NBS \sin \omega t$$

$$e = E_m \sin \omega t \quad \text{avec } E_m = \omega NBS$$

Cas particulier : auto induction

Soit un circuit parcouru par un courant d'intensité i. Ce courant crée un champs magnétique dont les lignes d'induction traversent nécessairement ce circuit. Autrement dit, la surface du circuit est traversée par un certain flux d'induction magnétique Φ. Φ est proportionnelle à l'induction B, or B est proportionnel à i. Par suite : Φ est proportionnel à i. On traduit cette proportionalité par la relation :

$$\varphi = L i$$

L est appelé coefficient d'autoinduction ou inductance propre du circuit. Si l'intensité i varie, φ varie et cette variation du flux engendre une f.e.m induite. Cette fem est appelée fem d'autoinduction. i est fonction de la date et la fem autoinduite à la date t a pour expression :

$$e = - L \frac{di}{dt}$$

Cette relation est à la base de la définition de l'unité SI d'autoinduction. Cette unité est le Henry (H). Le Henry est l'inductance propre d'un circuit pour lequel une variation linéaire de l'intensité du courant de 1 Ampère par seconde engendre une fem autoinduite de 1 Volt. Le Henry représente une inductance élevée. L'inductance propre d'une bobine sans noyau de fer doux est toujours une petite fraction de Henry.

On réalise des inductances de l'ordre de 1 H à l'aide de bobines en noyau de fer doux

32

Effet Joule en courant alternatif – Notion d'intensité efficace. 32

Expression de l'énergie dissipée par effet Joule dans une résistance R parcourue par un courant alternatif sinusoïdal

Soit $i = I_m \sin \omega t$ la fonction horaire de l'intensité du courant. Nous nous proposons de déterminer l'énergie calorifique dissipée dans cette résistance R pendant la durée d'une période. D'une façon générale, lorsqu'on veut appliquer au cas d'un courant alternatif de basse fréquence une loi établie pour le cas d'un courant continue (courant d'intensité constante), on considère deux dates infiniment voisines t et $t + dt$. L'intervalle de temps dt étant infiniment petit par rapport à la période T du courant. Pendant un tel intervalle de temps, la fonction i peut être regardée comme constante et la loi établie en courant continue est alors applicable. L'énergie calorifique dissipée dans la résistance R pendant cet intervalle de temps dt a pour expression :

$$dW = R i^2 dt$$

$$dW = R I_m^2 \sin^2 \omega t \, dt$$

L'énergie dissipée pendant la durée T d'une période s'exprime alors par l'intégrale définie :

$$\overset{T}{\underset{0}{W}} = \int_0^T R I_m^2 \sin^2 \omega t \, dt = R I_m^2 \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2} \right) dt$$

$$\overset{T}{\underset{0}{W}} = R I_m^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) \, dt = \frac{R I_m^2}{2} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T$$

$$\overset{T}{\underset{0}{W}} = \frac{R I_m^2}{2} T$$

Notion d'intensité efficace d'un courant alternatif

L'intensité efficace d'un courant alternatif est par définition égale à l'intensité du courant continu qui produirait dans la même résistance et pendant le même intervalle de temps une égale dissipation d'énergie par effet Joule. Proposons nous d'établir alors l'expression de l'intensité efficace d'un courant alternatif sinusoïdal. Nous désignerons cette intensité efficace par la notation I.

Pendant la durée T, un courant continu d'intensité I dissipe dans la résistance R une énergie calorifique $W = R I^2 T$

Exprimons $W = \overset{T}{\underset{0}{W}}$: $\quad R I^2 T = \frac{R I_m^2}{2} T$

$$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

C'est précisément la valeur efficace de l'intensité d'un courant sinusoïdal qui peut être lu sur un ampèremètre utilisable en courant alternatif.

Parallèlement à cette notion d'intensité efficace, on peut donner la définition d'une ddp efficace. Etant donné une portion de circuit aux bornes de laquelle est appliquée une ddp sinusoïdal $u = U_m \sin \omega t$, U_m représente la valeur maximale de cette ddp, et sa valeur efficace est

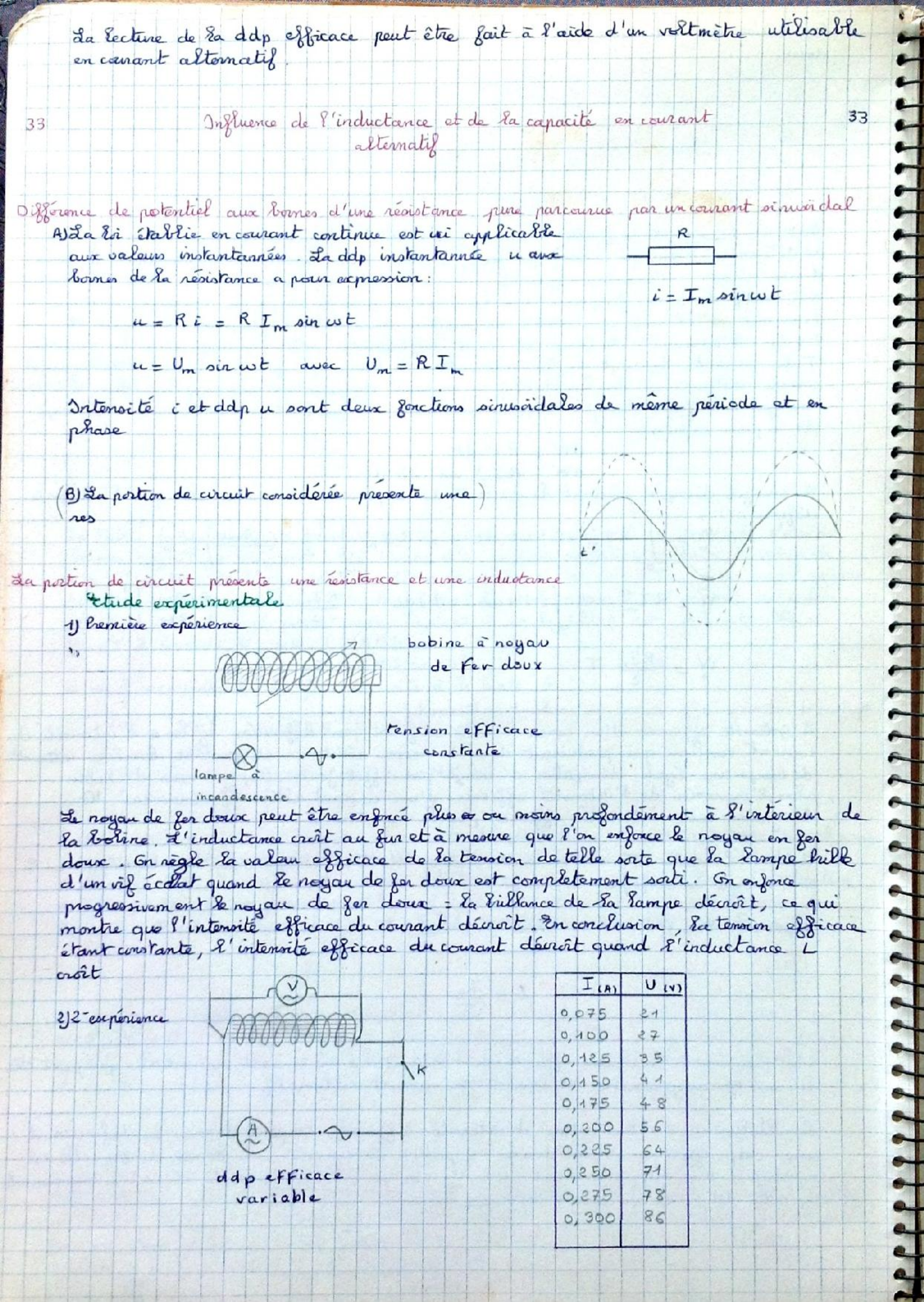
$$\boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$$

La lecture de la ddp efficace peut être fait à l'aide d'un voltmètre utilisable en courant alternatif.

Influence de l'inductance et de la capacité en courant alternatif

Différence de potentiel aux bornes d'une résistance pure parcourue par un courant sinusoïdal

A) La loi établie en courant continue est ici applicable aux valeurs instantannées. La ddp instantannée u aux bornes de la résistance a pour expression :



$$u = R i = R I_m \sin \omega t$$

$$u = U_m \sin \omega t \quad \text{avec} \quad U_m = R I_m$$

Intensité i et ddp u sont deux fonctions sinusoïdales de même période et en phase

(B) La portion de circuit considérée présente une) res

La portion de circuit présente une résistance et une inductance

Etude expérimentale

1) Première expérience

Le noyau de fer doux peut être enfoncé plus ou moins profondément à l'intérieur de la bobine. L'inductance croît au fur et à mesure que l'on enfonce le noyau en fer doux. On règle la valeur efficace de la tension de telle sorte que la lampe brille d'un vif éclat quand le noyau de fer doux est completement sorti. On enfonce progressivement le noyau de fer doux : la brillance de la lampe décroît, ce qui montre que l'intensité efficace du courant décroît. En conclusion, la tension efficace étant constante, l'intensité efficace du courant décroît quand l'inductance L croît

2) 2e expérience

I (A)	U (V)
0,075	21
0,100	27
0,125	35
0,150	41
0,175	48
0,200	56
0,225	64
0,250	71
0,275	78
0,300	86

On manoeuvre le thermostat de façon à faire varier la valeur efficace de la ddp aux bornes de la bobine. L'inductance L demeurant constante, on mesure une série de valeurs correspondantes de l'intensité efficace I et de la ddp efficace aux bornes de la bobine.

L'étude graphique révèle la proportionalité de la ddp efficace aux bornes de la bobine à l'intensité efficace du courant. On peut traduire cette relation par $U = K I$. Le coefficient de proportionalité K s'exprime graphiquement par le coefficient directeur de la droite.
On obtient: $K = \frac{86 - 21}{-0{,}075 + 0{,}3} \simeq 290$

Ce coefficient K quotient d'une ddp par une intensité s'exprime en Ohm, comme une résistance. Mais il ne peut être assimilé à la résistance R de la bobine. Il lui est d'ailleurs très supérieur (dans l'expérience réalisée, la résistance était $7\,\Omega$). On le désigne par le terme "impédance" et on le représente habituellement par la lettre Z.
On peut écrire :

$$U = Z I$$

On la retrouve évidemment pour les valeurs maximales U_m et I_m : $U_m = Z I_m$

3) 3e expérience.

L'oscillographe cathodique utilisé comporte 2 paires de plaques de déviation verticale (P_1 et P_2) - On peut l'utiliser en "bicourbe" et étudier simultanément 2 fonctions sinusoïdales de même période. On applique la ddp instantannée aux bornes de la bobine à forte inductance à l'une des paires de plaque. La courbe que l'on observera sur l'écran après avoir réglé convenablement la fréquence du balayage est représentative de la ddp instantanée u aux bornes de la bobine. En série, on a placé une petite résistance pure r. La ddp instantannée aux bornes de cette résistance est appliquée à l'autre paire de plaque de déviation vertical. La ddp u_1 aux bornes de r a pour expression : $u_1 = ri$. Elle est en phase avec la fonction i, la courbe correspondante peut donc être considérée comme représentative de la fonction i.

En jouant sur l'amplification pour l'une des courbes, par exemple la courbe représentative de i, on peut reconnaître cette courbe sur l'écran. On peut ainsi reconnaître laquelle des 2 fonctions (u ou i) est en avance sur l'autre, c'est la fonction u qui est en avance de phase sur la fonction i. A l'aide d'un papier millimétré, on peut déterminer approximativement cette avance de phase. Pour la bobine utilisée, à forte inductance et à faible résistance, cette avance de phase est voisine d'un $\frac{1}{4}$ de période, c'est-à dire de $\frac{\pi}{2}$.

Remarque : avec une bobine à inductance plus faible, le déphasage retard de i sur u est alors très inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Etude théorique

Soit $i = I_m \sin\omega t$ l'intensité instantannée du courant qui parcourt la bobine d'inductance L et de résistance R. La variation de i en fct de la date engendre une fem autoinduite de valeur instantanée $e = -L\frac{di}{dt}$. Cette fem qui tend à moderer les variations de i qui lui donnent naissance joue le rôle de force contre electromotrice et la ddp u s'exprime par la relation $u = Ri + e'$ avec $e' = -e$

$u = Ri - e$ (voir généralisation de la loi d'Ohm)

$$u = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$u = RI_m \sin\omega t + L\omega I_m \cos\omega t$$

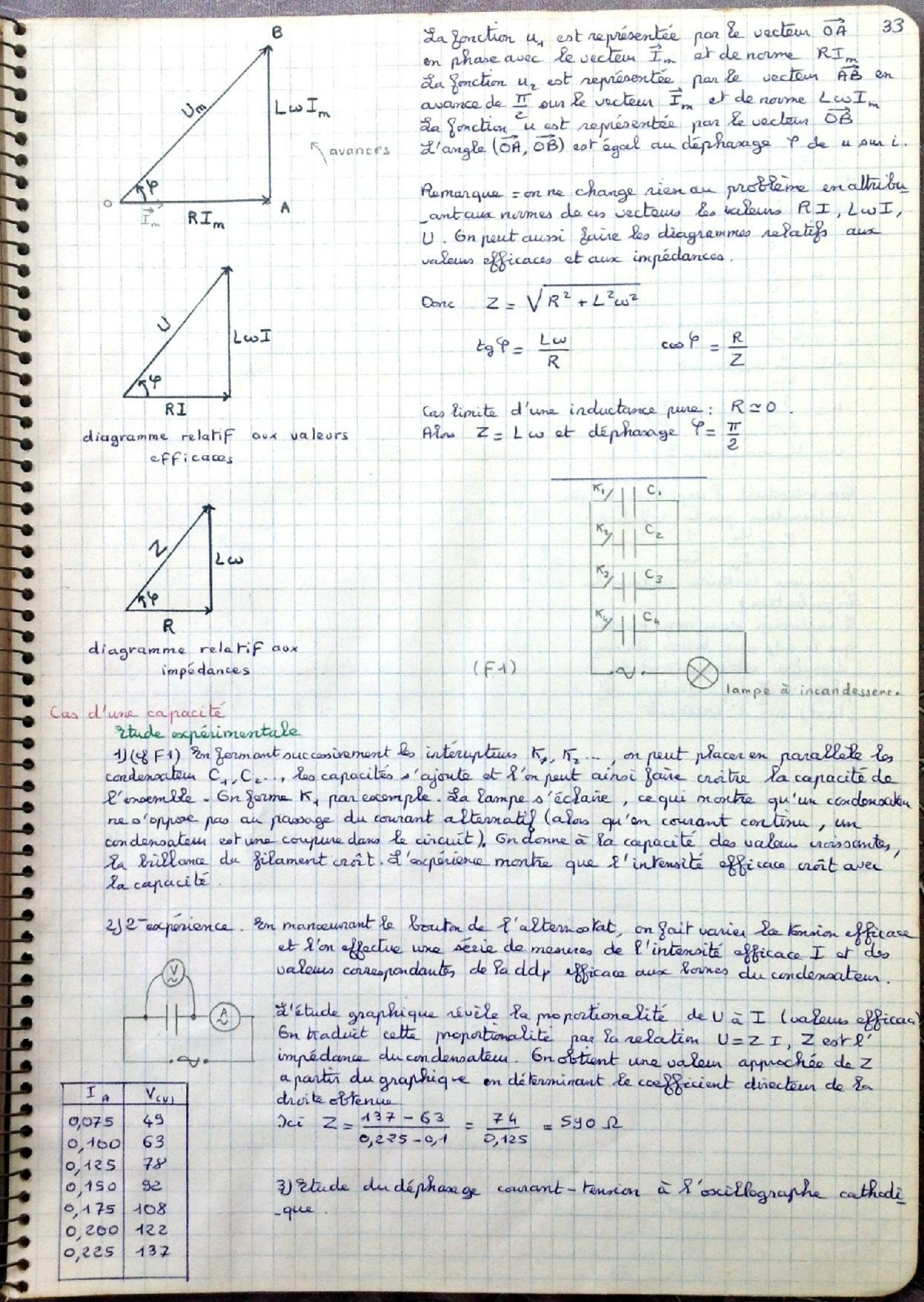
$$u = RI_m \sin\omega t + L\omega I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$u = u_1 + u_2$ u est la somme de 2 fcts sinusoïdales u_1 et u_2 de même pulsation ω. C'est une fct sinusoïdale de pulsation ω.

Soit $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ - Reste à déterminer U_m et φ.

Le problème peut être résolu par la construction de Fresnel.

Nous prendrons l'axe origine des phases de même direction et de même sens que le vecteur $\vec{I}_m$ representatif de la fct i.



La fonction u_1 est représentée par le vecteur $\vec{OA}$ en phase avec le vecteur $\vec{I}_m$ et de norme RI_m.
La fonction u_2 est représentée par le vecteur $\vec{AB}$ en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur le vecteur $\vec{I}_m$ et de norme $L\omega I_m$.
La fonction u est représentée par le vecteur $\vec{OB}$.
L'angle $(\vec{OA}, \vec{OB})$ est égal au déphasage φ de u sur i.

Remarque : on ne change rien au problème en attribuant aux normes de ces vecteurs les valeurs RI, $L\omega I$, U. On peut aussi faire les diagrammes relatifs aux valeurs efficaces et aux impédances.

diagramme relatif aux valeurs efficaces

Donc $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R} \qquad \cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

Cas limite d'une inductance pure : $R \simeq 0$.
Alors $Z = L\omega$ et déphasage $\varphi = \frac{\pi}{2}$

diagramme relatif aux impédances

(F1)

Cas d'une capacité

Etude expérimentale

1) (cf F1) En fermant successivement les interrupteurs K_1, K_2 ..., on peut placer en parallèle les condensateurs C_1, C_2..., les capacités s'ajoute et l'on peut ainsi faire croître la capacité de l'ensemble. On ferme K_1 par exemple. La lampe s'éclaire, ce qui montre qu'un condensateur ne s'oppose pas au passage du courant alternatif (alors qu'en courant continu, un condensateur est une coupure dans le circuit). On donne à la capacité des valeurs croissantes, la brillance du filament croît. L'expérience montre que l'intensité efficace croît avec la capacité.

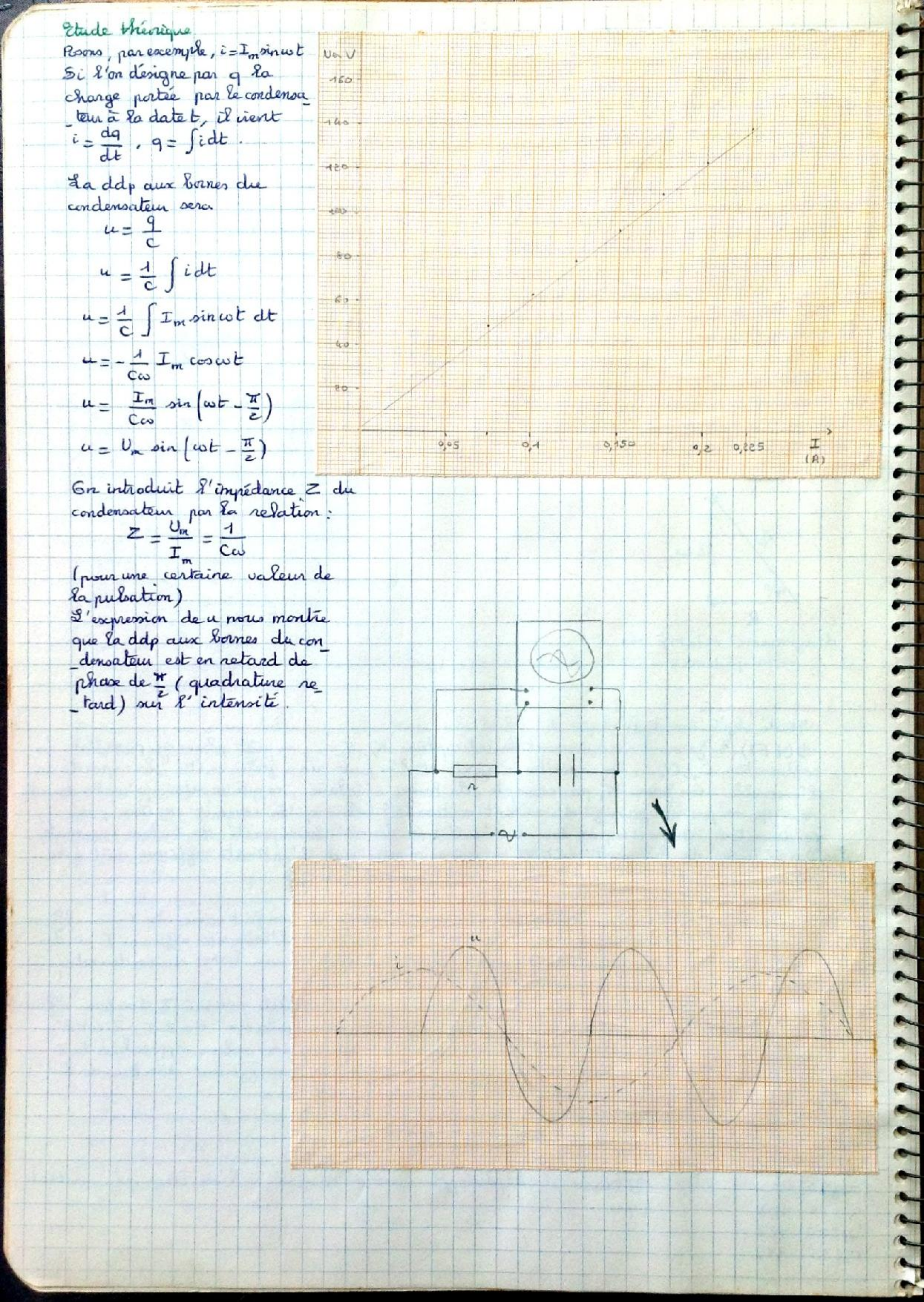
2) 2e expérience. En manoeuvrant le bouton de l'alternostat, on fait varier la tension efficace et l'on effectue une série de mesures de l'intensité efficace I et des valeurs correspondantes de la ddp efficace aux bornes du condensateur.

L'étude graphique révèle la proportionalité de U à I (valeurs efficaces). On traduit cette proportionalité par la relation $U = Z\,I$, Z est l'impédance du condensateur. On obtient une valeur approchée de Z à partir du graphique en déterminant le coefficient directeur de la droite obtenue.

I_A	$V_{(V)}$
0,075	49
0,100	63
0,125	78
0,150	92
0,175	108
0,200	122
0,225	137

Ici $Z = \frac{137 - 63}{0{,}225 - 0{,}1} = \frac{74}{0{,}125} = 590\ \Omega$

3) Etude du déphasage courant-tension à l'oscillographe cathodique.



Etude théorique

Posons, par exemple, $i = I_m \sin \omega t$

Si l'on désigne par q la charge portée par le condensateur à la date t, il vient

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad q = \int i\,dt.$$

La ddp aux bornes du condensateur sera

$$u = \frac{q}{C}$$

$$u = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$u = \frac{1}{C}\int I_m \sin \omega t\,dt$$

$$u = -\frac{1}{C\omega} I_m \cos \omega t$$

$$u = \frac{I_m}{C\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

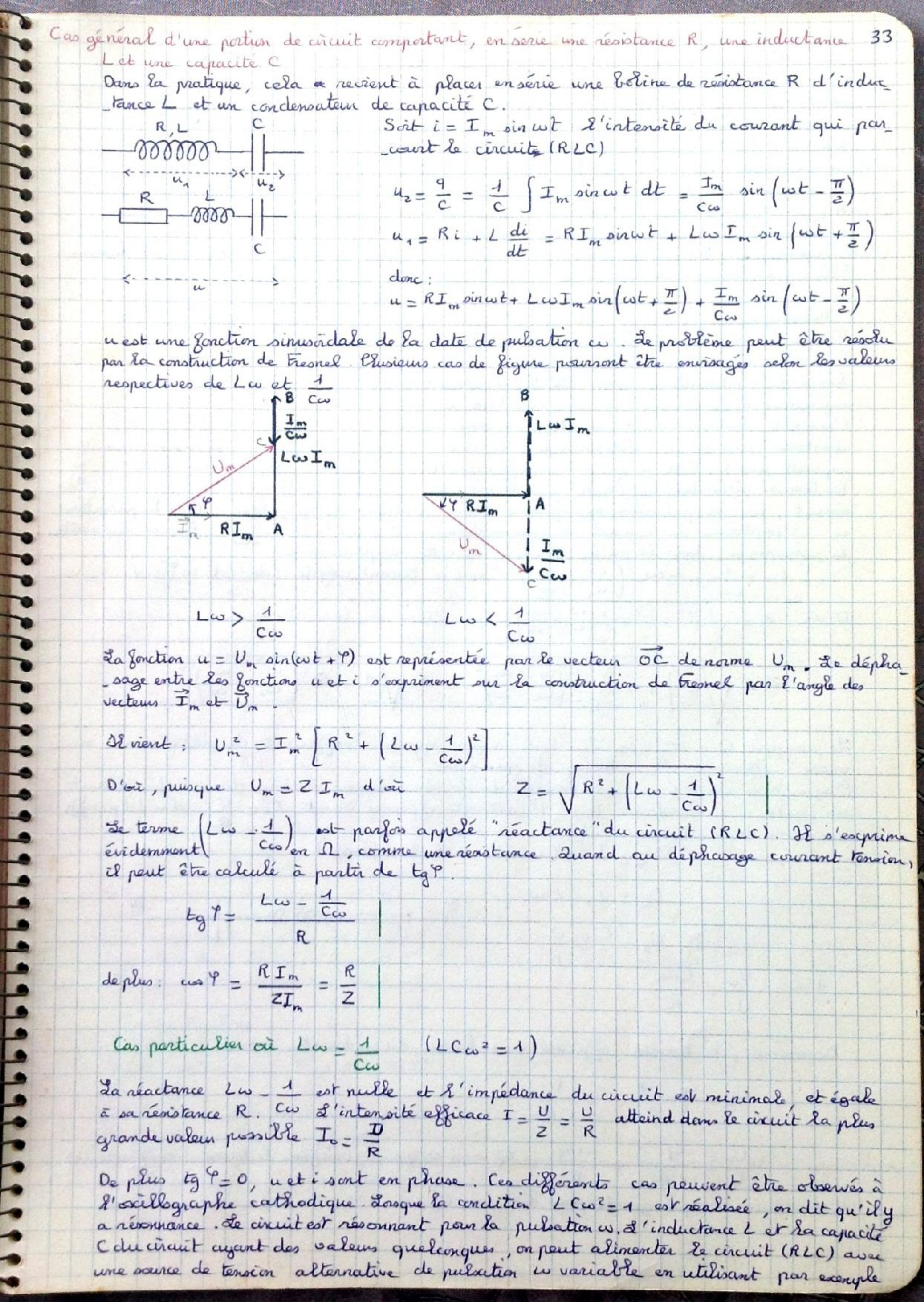
$$u = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

On introduit l'impédance Z du condensateur par la relation :

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{C\omega}$$

(pour une certaine valeur de la pulsation)

L'expression de u nous montre que la ddp aux bornes du condensateur est en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ (quadrature retard) sur l'intensité.



Cas général d'une portion de circuit comportant, en série une résistance R, une inductance L et une capacité C

Dans la pratique, cela revient à placer en série une bobine de résistance R d'inductance L et un condensateur de capacité C.

Soit $i = I_m \sin \omega t$ l'intensité du courant qui parcourt le circuit (RLC)

$$u_2 = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int I_m \sin \omega t \, dt = \frac{I_m}{C\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u_1 = Ri + L\frac{di}{dt} = RI_m \sin \omega t + L\omega I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

donc :

$$u = RI_m \sin \omega t + L\omega I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

u est une fonction sinusoïdale de la date de pulsation ω. Le problème peut être résolu par la construction de Fresnel. Plusieurs cas de figure pourront être envisagés selon les valeurs respectives de $L\omega$ et $\frac{1}{C\omega}$

La fonction $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OC}$ de norme U_m. Le déphasage entre les fonctions u et i s'expriment sur la construction de Fresnel par l'angle des vecteurs $\vec{I}_m$ et $\vec{U}_m$.

Il vient : $U_m^2 = I_m^2 \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]$

D'où, puisque $U_m = Z I_m$ d'où $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Le terme $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ est parfois appelé "réactance" du circuit (RLC). Il s'exprime évidemment en Ω, comme une résistance. Quand au déphasage courant tension, il peut être calculé à partir de $\operatorname{tg}\varphi$.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

de plus : $\cos\varphi = \frac{RI_m}{ZI_m} = \frac{R}{Z}$

Cas particulier où $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ $(LC\omega^2 = 1)$

La réactance $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ est nulle et l'impédance du circuit est minimale, et égale à sa résistance R. L'intensité efficace $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R}$ atteind dans le circuit la plus grande valeur possible $I_0 = \frac{U}{R}$

De plus $\operatorname{tg}\varphi = 0$, u et i sont en phase. Ces différents cas peuvent être observés à l'oscillographe cathodique. Lorsque la condition $LC\omega^2 = 1$ est réalisée, on dit qu'il y a résonnance. Le circuit est résonnant pour la pulsation ω. L'inductance L et la capacité C du circuit ayant des valeurs quelconques, on peut alimenter le circuit (RLC) avec une source de tension alternative de pulsation ω variable en utilisant par exemple



un générateur BF (basse fréquence). Avec un générateur BF, on peut faire varier la fréquence de la valeur 20 Hz à la valeur 20 000 Hz environ. On peut ainsi déterminer expérimentalement la valeur ω_0 de la pulsation à la résonnance, valeur pour laquelle $LC\omega_0^2 = 1$ est vraie. On peut aussi étudier expérimentalement les variations de l'intensité efficace I en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence $N = \frac{\omega}{2\pi}$, toutes les mesures étant réalisées evidemment à tension efficace constante. La courbe représentative qui joint les pts expérimentaux à l'allure dessinée ci-dessous. Elle est dite courbe de résonnance

Remarque

Lorsque la condition de résonnance est satisfaite, les tensions efficaces aux bornes de la self et aux bornes du condensateur peuvent être très largement supérieures à la tension efficace aux bornes de l'ensemble. Soit un circuit comportant en série une résistance pure R, une inductance pure L, une capacité pure C. Soit U la valeur efficace de la tension sinusoïdale appliquée aux bornes du circuit, ω_0 la pulsation satisfaisant à la condition de résonnance. Pour la pulsation ω l'impédance du circuit a pour expression : $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$. Faisons apparaître la pulsation ω_0 dans la partie réactive de cette impédance Z.

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = L\omega_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$, ceci en tenant compte de $LC\omega_0^2 = 1$.

D'où $$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$$Z = \sqrt{R^2\left[1 + \frac{L^2\omega_0^2}{R^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]} = R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

Le rapport $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ est parfois appelé "coefficient de surtension" ou encore "coefficient de qualité".

Plaçons nous dans le cas particulier de la résonnance. L'impédance du circuit est égale à sa résistance R, l'intensité efficace vaut $I_0 = \frac{U}{R}$. La ddp efficace aux bornes de la bobine vaut :

$$U_L = I_0 \times (\text{impédance de la bobine})$$

$$U_L = I_0 \cdot L\omega_0$$

$$U_L = L\omega_0 \frac{U}{R}$$

d'où $$\frac{U_L}{U} = \frac{L\omega_0}{R}$$

De même, la tension efficace aux bornes du condensateur est :

$$U_C = I_0 \frac{1}{C\omega_0} = \frac{U}{CR\omega_0}$$

$$\frac{U_C}{U} = \frac{1}{CR\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R} = Q$$, ce qui justifie le terme "coefficient de surtension" employé pour désigner Q.

Soit une portion de circuit parcourue par un courant alternatif par d'intensité $i = I_m \sin\omega t$
La ddp aux bornes de cette portion de circuit a pour expression $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$
Si l'on considère 2 dates infiniment voisines t et $t + dt$, l'intervalle de temps dt étant infiniment petit par rapport à la periode T du courant alternatif. On peut exprimer l'énergie élémentaire consommée entre ces deux dates en appliquant la loi établie en courant continu : $dW = u\,i\,dt = U_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t + \varphi)\,dt$
L'énergie consommée pendant la durée d'une période (par exemple, entre les dates 0 et T) s'exprime alors par l'intégrale définie

$$\overset{T}{\underset{0}{W}} = \int_0^T U_m I_m \sin\omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi)\,dt$$

$$\sin\omega t \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)\right]$$

$$\overset{T}{\underset{0}{W}} = \frac{U_m I_m}{2}\int_0^T \cos\varphi\,dt - \frac{U_m I_m}{2}\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)\,dt$$

$$\overset{T}{\underset{0}{W}} = \frac{U_m I_m}{2}\,T\cos\varphi - \underbrace{\frac{U_m I_m}{2}\left[\frac{\sin(2\omega t + \varphi)}{2\omega}\right]_0^T}_{0}$$

$$\overset{T}{\underset{0}{W}} = \frac{U_m I_m}{2}(\cos\varphi)\,T$$

Soit enfin, en introduisant les valeurs efficaces de U et I.

$$\overset{T}{\underset{0}{W}} = UI(\cos\varphi)\,T$$

La puissance moyenne consommée par le circuit a pour expression :

$$\mathcal{P} = \frac{\overset{T}{\underset{0}{W}}}{T}, \quad \mathcal{P} = UI\cos\varphi$$

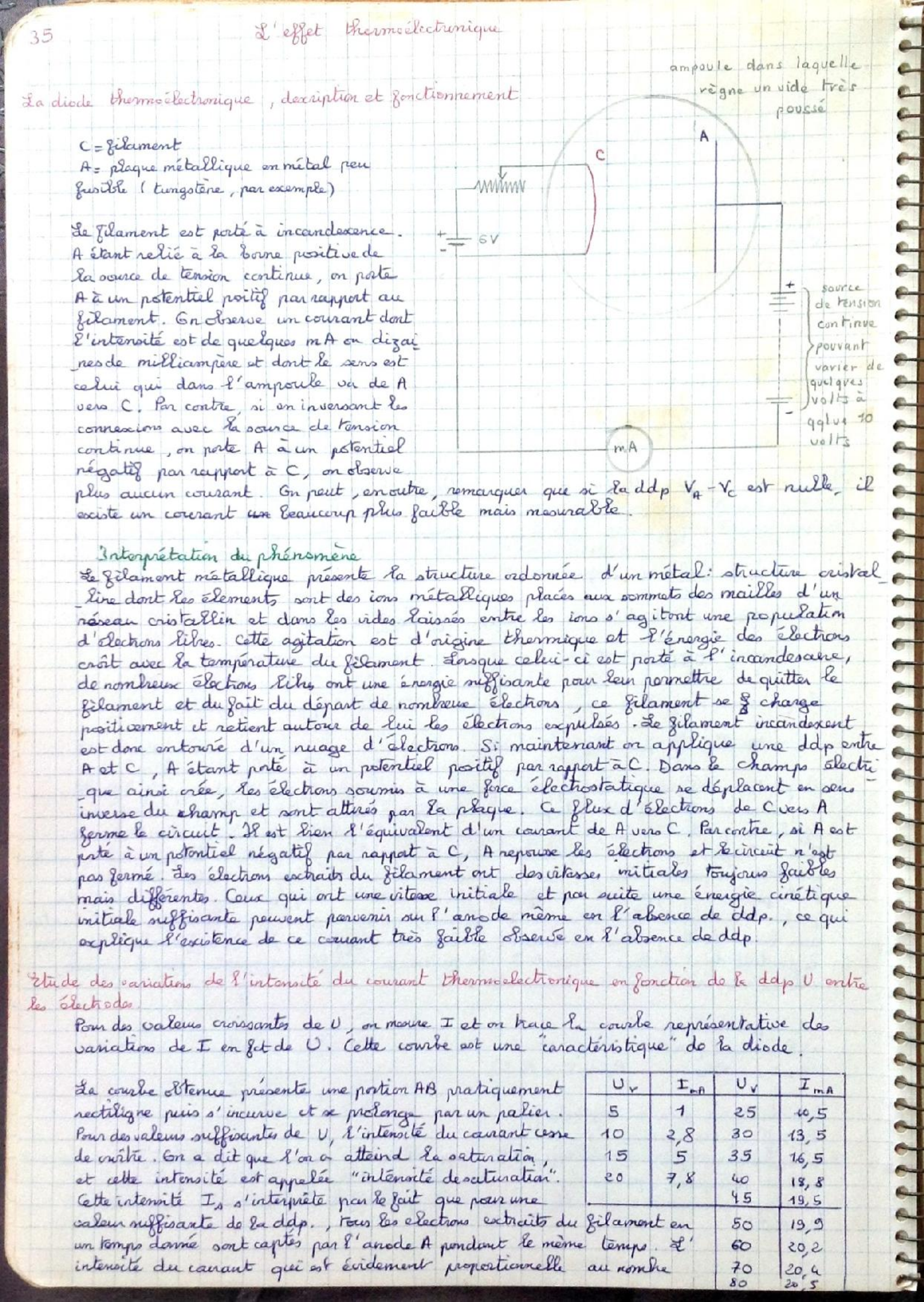
Le produit $\mathcal{P}_a = UI$ est appelé "puissance apparente", $\cos\varphi$ est appelé "facteur de puissance" du circuit. La puissance réellement consommée par le circuit est donc égale au produit de la puissance apparente par le facteur de puissance du circuit.
Pour distinguer puissance apparente et puissance réelle, on exprime la puissance apparente en Volt-ampères, alors que la puissance réelle s'exprime en Watts. La mesure de la puissance apparente s'effectue en insérant un ampèremètre en série avec la portion de circuit (lecture de I efficace) et en plaçant un voltmètre en dérivation aux bornes de la portion de circuit (lecture de U efficace). Il suffit alors de faire le produit des 2 lectures. Quant à la puissance réelle consommée par le circuit, elle est mesuré avec un Wattmètre.

Cas particuliers

a) Résistance pure
$\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ $\quad P = UI = RI^2$

b) Inductance pure ou capacité pure
$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$, $P = 0$
Une inductance pure ou une capacité pure alimentée en courant alternatif ne consomment aucune puissance, par conséquent, dans le cas d'un circuit (RLC), la seule puissance consommée est celle consommée par effet Joule dans la résistance R.
$P = RI^2$

La diode thermoélectronique, description et fonctionnement



C = filament
A = plaque métallique en métal peu fusible (tungstène, par exemple)

Le filament est porté à incandexence. A étant relié à la borne positive de la source de tension continue, on porte A à un potentiel positif par rapport au filament. On observe un courant dont l'intensité est de quelques mA ou dizaines de milliampère et dont le sens est celui qui dans l'ampoule va de A vers C. Par contre, si en inversant les connexions avec la source de tension continue, on porte A à un potentiel négatif par rapport à C, on observe plus aucun courant. On peut, en outre, remarquer que si la ddp $V_A - V_C$ est nulle, il existe un courant beaucoup plus faible mais mesurable.

Interprétation du phénomène

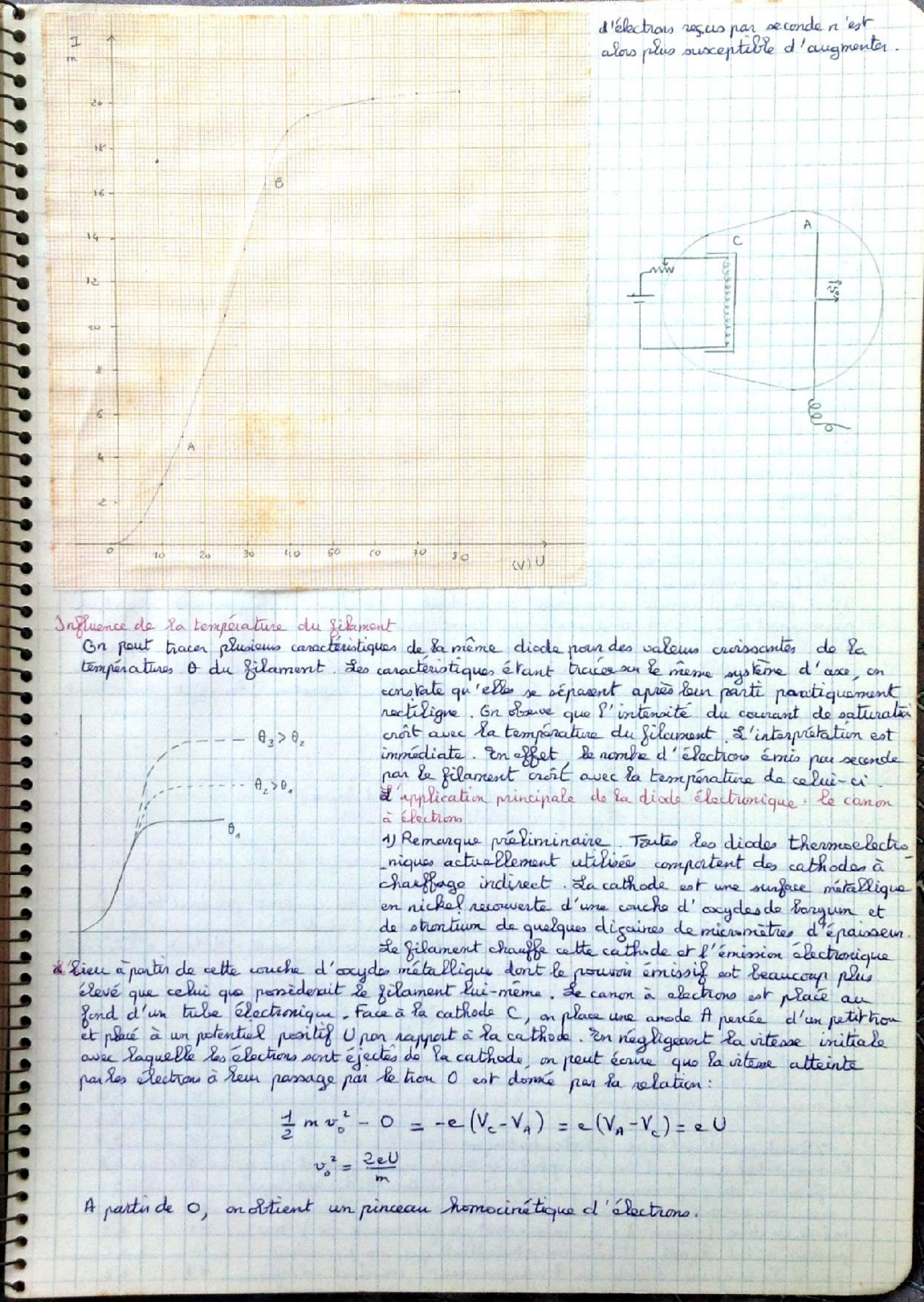
Le filament métallique présente la structure ordonnée d'un métal : structure cristalline dont les éléments sont des ions métalliques placés aux sommets des mailles d'un réseau cristallin et dans les vides laissés entre les ions s'agitent une population d'électrons libres. Cette agitation est d'origine thermique et l'énergie des électrons croît avec la température du filament. Lorsque celui-ci est porté à l'incandescence, de nombreux électrons libres ont une énergie suffisante pour leur permettre de quitter le filament et du fait du départ de nombreux électrons, ce filament se charge positivement et retient autour de lui les électrons expulsés. Le filament incandexent est donc entouré d'un nuage d'électrons. Si maintenant on applique une ddp entre A et C, A étant porté à un potentiel positif par rapport à C. Dans le champ électrique ainsi crée, les électrons soumis à une force électrostatique se déplacent en sens inverse du champ et sont attirés par la plaque. Ce flux d'électrons de C vers A ferme le circuit. Il est bien l'équivalent d'un courant de A vers C. Par contre, si A est porté à un potentiel négatif par rapport à C, A repousse les électrons et le circuit n'est pas fermé. Les électrons extraits du filament ont des vitesses initiales toujours faibles mais différentes. Ceux qui ont une vitesse initiale et par suite une énergie cinétique initiale suffisante peuvent parvenir sur l'anode même en l'absence de ddp., ce qui explique l'existence de ce courant très faible observé en l'absence de ddp.

Etude des variations de l'intensité du courant thermoélectronique en fonction de la ddp U entre les électrodes

Pour des valeurs croissantes de U, on mesure I et on traçe la courbe représentative des variations de I en fct de U. Cette courbe est une "caractéristique" de la diode.

U_V	I_{mA}	U_V	I_{mA}
5	1	25	10,5
10	2,8	30	13,5
15	5	35	16,5
20	7,8	40	18,8
		45	19,5
		50	19,9
		60	20,2
		70	20,4
		80	20,5

La courbe obtenue présente une portion AB pratiquement rectiligne puis s'incurve et se prolonge par un palier. Pour des valeurs suffisantes de U, l'intensité du courant cesse de croître. On a dit que l'on a atteind la saturation, et cette intensité est appelée "intensité de saturation". Cette intensité I_s s'interprète par le fait que pour une valeur suffisante de la ddp., tous les électrons extraits du filament en un temps donné sont captés par l'anode A pendant le même temps. L'intensité du courant qui est évidemment proportionnelle au nombre



d'électrons reçus par seconde n'est alors plus susceptible d'augmenter.

Influence de la température du filament

On peut tracer plusieurs caractéristiques de la même diode pour des valeurs croissantes de la température θ du filament. Les caractéristiques étant tracées sur le même système d'axe, on constate qu'elles se séparent après leur parti pratiquement rectiligne. On observe que l'intensité du courant de saturation croît avec la température du filament. L'interprétation est immédiate. En effet le nombre d'électrons émis par seconde par le filament croît avec la température de celui-ci.

L'application principale de la diode électronique : le canon à électrons

1) Remarque préliminaire. Toutes les diodes thermoélectroniques actuellement utilisées comportent des cathodes à chauffage indirect. La cathode est une surface métallique en nickel recouverte d'une couche d'oxydes de baryum et de strontium de quelques dizaines de micromètres d'épaisseur. Le filament chauffe cette cathode et l'émission électronique a lieu à partir de cette couche d'oxydes métalliques dont le pouvoir émissif est beaucoup plus élevé que celui que possédait le filament lui-même. Le canon à électrons est placé au fond d'un tube électronique. Face à la cathode C, on place une anode A percée d'un petit trou et placé à un potentiel positif U par rapport à la cathode. En négligeant la vitesse initiale avec laquelle les électrons sont éjectés de la cathode, on peut écrire que la vitesse atteinte par les électrons à leur passage par le trou O est donnée par la relation :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - 0 = -e(V_C - V_A) = e(V_A - V_C) = eU$$

$$v_0^2 = \frac{2eU}{m}$$

A partir de O, on obtient un pinceau homocinétique d'électrons.

La cellule photoélectrique, description et fonctionnement

couche d'un métal alcalin (Na, K, Cs)
vide très poussé
Faisceau de lumière monochromatique
C
A
electrode en W ayant la forme d'un anneau ou d'une spirale ou d'un simple fil
+
−
source de tension continue
µA

La cellule utilisée en cours est au césium et l'on l'éclaire avec le faisceau monochromatique de lumière jaune émise par une lampe au sodium.
Ayant porté l'électrode A à un potentiel positif par rapport à C, on éclaire le dépôt métallique de césium avec le faisceau monochromatique.
Le spot du galvanomètre dévie, attestant un courant dont l'intensité est de quelques microampères et dont le sens est celui qui dans la cellule va de A vers C.
Interprétation : sous l'action du rayonnement incident qui leur apporte de l'énergie, des électrons sont extraits des atomes du dépôt métallique. Les électrons ainsi extraits sont accélérés dans le champs électrique qui règne entre A et C et captés par l'anode A. Ce flux d'électrons de C vers A est bien l'équivalent d'un courant dont le sens va de A vers C

Remarque
Supprimons la ddp entre A et C et éclairons la photocathode. Le spot dévie légèrement attestant un courant très faible mais mesurable. En effet, les électrons expulsés de la photocathode possèdent des vitesses initiales d'éjection variables. Certains d'entre eux ont une vitesse initiale v_0 suffisante pour leur permettre d'atteindre l'électrode A en l'absence de ddp. Il est possible d'annuler ce courant en rendant l'électrode A légèrement négative par rapport à C, c'est-à-dire en appliquant entre A et C une ddp $U_0 = V_A - V_C < 0$.
Dans l'expérience que nous avons réalisée, nous avons trouvé $U_0 \simeq -1$ V. U_0 est appelé potentiel d'arrêt. La mesure du potentiel d'arrêt permet de connaître l'énergie cinétique initiale maximale $E_{c_0} = \frac{1}{2} m v_0^2$ des électrons expulsés. En effet, on obtient par application du théorème de l'énergie cinétique.

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -e\,(V_C - V_A)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = e\,(-U_0) \quad \text{d'où } E_{c_0}$$

Etude des variations de l'intensité du courant photoélectrique en fct de la ddp $U = V_A - V_C$ entre les 2 électrodes

Il est essentiel, pour étudier ces variations de maintenir constant pendant toute la durée de l'expérience l'éclairement de la cathode. L'étude graphique que l'intensité du courant photoélectrique cesse d'augmenter pour des valeurs suffisament grandes de U. La valeur correspondante est dite intensité du courant de saturation. Cette intensité I_s est evidemment obtenue lorsque, pour une ddp suffisante, tous les électrons extraits de la cathode pendant un certain temps sont captés pendant le même temps par l'anode.

$U = V_A - V_C$ V	déviation d cm du spot = kI
−1 V	0 cm
0	0,7
1	2,3
2	3,5
3	4,4
4	4,9
5	5,3
6	5,5
7	5,7
8	5,8
9	5,9
10	6
11	6,1
12	6,2
13	6,2

Lois expérimentales de l'effet photoélectrique dans le vide et dans le cas des métaux purs

1°/ Existence d'un seuil photoélectrique

Pour un métal donné, l'émission photoélectrique ne se produit que si la fréquence du rayonnement qui éclaire la photocathode est supérieure ou au moins égale à une certaine fréquence ν_0. Il revient au même de dire (comme $\lambda = \frac{c}{\nu}$ inversement proportionnelle à ν) que, pour un métal donné, l'émission photoélectrique ne se produit que si la longueur d'onde du rayonnement incident est inférieure

ou au plus égale, à une longueur d'onde λ_0. ν_0 et λ_0 ne dépendent que de la nature du métal constituant la cathode et caractérise ce métal du pt de vue de l'effet photoélectrique. λ_0 est la longueur d'onde du seuil photoélectrique pour ce métal.

Pour le césium, $\lambda_0 = 0,66$ µm

Seconde loi : l'intensité du courant de saturation est rigoureusement proportionnelle à la puissance rayonnante reçue par la photocathode (nous appelerons puissance rayonnante reçue l'énergie reçue par seconde par l'unité d'aire de surface utile de la photocathode). Cette proportionalité se maintient d'ailleurs avec une excellente précision même pour des puissances rayonnantes reçues très faibles.

3- loi

L'énergie cinétique initiale maximale des électrons expulsés d'une photocathode est indépendante de la puissance rayonnante reçue, elle ne dépend que de la fréquence ν du rayonnement incident, elle est une fonction affine croissante de cette fréquence.

4- loi : la photocathode ne présente pas d'inertie

L'émission photoélectrique est instantanée, elle se produit dès qu'on éclaire la photocathode et elle cesse dès que cesse l'éclairement (l'irradiation) de la photocathode. On dit que la cellule photoélectrique ne présente pas d'inertie. (en outre, l'intensité du courant de saturation suit sans retard apreciable les variations de la puissance rayonnante reçue).

Interprétation des lois de l'effet photoélectrique

Lorsqu'au début de ce siècle, ces lois furent établies, il apparu qu'il était impossible d'en fournir la moindre explication dans le cadre de la théorie ondulatoire de la lumière. En effet, cette théorie postule une répartition uniforme de l'énergie du rayonnement sur toute la surface de l'onde, et dans cette hypothèse aucune des particularités de l'émissions photoélectrique ne peut être expliquée. Pour interpréter ces particularités, Einstein part d'un point de vue radicalement opposé. Extrapolant les conclusions obtenues par le physicien allemand Max Planck à propos de l'étude du rayonnement du corps noir, il postule que l'énergie d'un rayonnement électromatique est distribuée sous forme discontinue, quantifiée, sous forme de véritables grains d'énergie. Un tel grain d'énergie, un photon, de radiation de fréquence ν, représente un quantum d'énergie $W = h\nu$. La constante h est la constante de Planck ($h = 6,62 . 10^{-34}$ J.s). Or, pour extraire un électron de la couche électronique externe d'un atome, il faut fournir à cet atome une énergie W_0 appelé travail d'extraction (ou encore énergie de première ionisation) et dépendant de la nature du métal. L'émission photoélectrique apparait alors comme un échange individuel d'énergie rayonnante entre 1 photon du rayonnement et un atome du métal irradié. Si le quantum $W = h\nu$, est inférieur à W_0, l'émission photoélectrique ne peut avoir lieu. Si $W = W_0$, l'électron est émis sans vitesse initiale. La fréquence ν_0 correspondante est $W = h\nu_0$, et $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$. Si maintenant, $h\nu > h\nu_0$, l'électron est expulsé avec une vitesse initiale v_0 et le bilan de cet échange individuel d'énergie se traduit par la relation d'Einstein

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{1}{2} m v^2$$

On voit bien que $\frac{1}{2} m v^2 = h\nu - W_0$ est une fonction affine croissante de la fréquence ν et est indépendante de la puissance rayonnante reçue.

37 ## La radioactivité

A l'origine de la découverte du phénomène, il faut citer une expérience effectuée par le physicien français Henri Becquerel en 1896. Becquerel, professeur de physique au museum d'histoire naturel pose un Echantillon de minerai d'uranium sur une plaque photographique enveloppée de papier noir. Après développement de cette plaque, il observe que celle-ci a été impressionnée, il donne le nom de rayonnement radioactif au rayonnement émanent de ce minerais et qui a impressionné la plaque photographique. Ce sera ensuite la tache des physiciens Marie et Pierre Curie de montrer que la radioactivité de l'uranium n'était pas une énigme unique dans la nature. Marie Curie découvrit le polonium, le radium et par la suite d'autre éléments radioactifs, le thorium, par exemple, furent découverts.

Ce rayonnement se manifeste par un certain nombre de propriétés : il impressionne la plaque photographique, il se manifeste par un pouvoir ionisant (c'est ainsi qu'il provoque la décharge de l'électroscope initialement chargé. Le rayonnement radioactif ionise les molécules gazeuses entourant la boule de l'électroscope et celui-ci se décharge, qu'il soit initialement chargé positivement ou négativement), il provoque la fluorescence de certaines substances (fluorescence verte d'un écran au sulfure de zinc ou au platinocyanure de baryum), il transporte de l'énergie, il détruit par ionisation les cellules vivantes.

	Particules α	particules β	rayonnement γ
Nature	noyaux d'Hélium ^4_2He	électrons	rayonnement électromagnétique $10^{-13}A < \lambda < 10^{-9}A$
Caractéristiques	charge positive +2e masse ≈ 4 u.m.a.	charge négative — e masse de l'électron $\approx \frac{1\ u.m.a.}{1800}$	ni charge ni masse
Propriétés essentielles	• vitesse 20 000 km/s • particules fortement ionisantes • impressionnent les plaques photographiques • provoquent la fluorescence • peu pénétrantes (quelques cm d'air) • graves dangers biologiques	• vitesse ≈ 280 000 km/s • particules moyennement ionisantes • impressionnent les plaques photographiques • provoquent la fluorescence • pénétrantes (quelques mm d'Al) • dangers biologiques limités	• c = 300 000 km/s • rayonnement fortement ionisant • impressionnent les plaques photographiques • provoquent la fluorescence • très pénétrant (1 à 20 cm de plomb) • graves dangers biologiques

Différents moyens de détection du rayonnement radioactif

Nous les avons envisagés dans le cours de chimie.
Rappelons, pour mémoire
a) La plaque photographique
b) La chambre à bulle
c) Le compteur de Geiger

tube métallique contenant un gaz sous faible pression
Fil métallique axial isolé du tube
Fil conducteur
TERRE
tension de qlques cent. de Volt
+
-
r
amplificateur
vers un haut parleur ou un compteur

Supposons qu'une particule ionisante pénètre à l'intérieur du tube. Sur sa trajectoire, elle ionise les atomes rencontrés. Les électrons libérés sont attirés par le fil axial et cet apport d'électrons se traduit par un microcourant très bref qui, entre les bornes de la résistance extérieure r crée une impulsion de tension. Cette microtension est reçue entre les bornes d'entrée d'un amplificateur et la tension amplifiée peut actionner un haut parleur (on perçoit un top pour chaque particule) ou déclencher un système de numération qui permet de compter les particules.

Le rayonnement d'un corps radioactif naturel

A o B

$\vec{E}$

vide

Au fond d'une gouttière en plomb, on place un échantillon radioactif naturel, et, à une certaine distance normalement à la direction de la gouttière, on place une plaque photographique. La plaque photographique est impressionnée au pt O, intersection de cette plaque avec la direction de la gouttière. Mais si l'on impose au rayonnement la traversée d'un champs électrique qui règne entre les armatures d'un condensateur, la plaque est impressionnée aux pts A et O et B. Le rayonnement radioactif se compose donc en fait de plusieurs rayonnements. La tache observée en B est dûe à l'impact en ce point de particules α noyaux d'atomes d'hélium ^4_2He. Les vitesses de ces particules α sont comprises entre 15 000 et 25 000 km.s⁻¹. Le rayonnement α formé de particules peu rapides et peu pénétrantes est arrêté dans l'air après un parcours de quelques centimètres.

L'impact observé en A est dû à des électrons animés de vitesses sensiblement voisines de 280 000 km.s⁻¹. Il est arrêté par une mince feuille d'aluminium. La tache observée en O est dûe à l'impact d'un rayonnement de même nature que le rayonnement lumineux, que les rayons ultra-violets, que les rayons X, mais de très courtes longueurs d'onde, inférieures à celles des rayons X les plus pénétrants. Il s'agit de photons de quantum $h\nu = h\frac{c}{\lambda}$ très élevés. Le rayonnement γ est très pénétrant. Il peut par exemple traverser une épaisseur de plomb de l'ordre de 20 cm.

Les 2 types de radioactivité rencontrés dans le rayonnement d'un corps radioactif naturel

La radioactivité est un phénomène nucléaire consistant en la désintégration spontanée du noyau d'un nucléide radioactif. Cette désintégration s'accompagne de l'émission d'une particule et de la formation d'un nouveau noyau. Si le noyau obtenu est lui même celui d'un nucléide radioactif, il se désintégrera à son tour et les désintégrations se poursuivront suivant une "filiation radioactive" jusqu'à l'obtention d'un noyau stable (un isotope du plomb).

On rencontre 2 types de désintégration dans le rayonnement radioactif naturel: ~~la rad~~
- la radioactivité α
- la radioactivité β^-

On traduit une désintégration radioactive par une équation dans le 1ᵉʳ membre de laquelle on place le symbole du noyau initial en indiquant le numéro atomique Z et le nombre de masse A du nucléide, et dans le second membre de laquelle on indique le symbole du noyau obtenu et celui de la particule émise. L'équation respecte la conservation des nombres de charge et des nombres de masse.

Radioactivité α

Une particule α est formée de 2 protons associés à 2 neutrons. On la formule ^4_2He.
La désintégration α se formule donc:

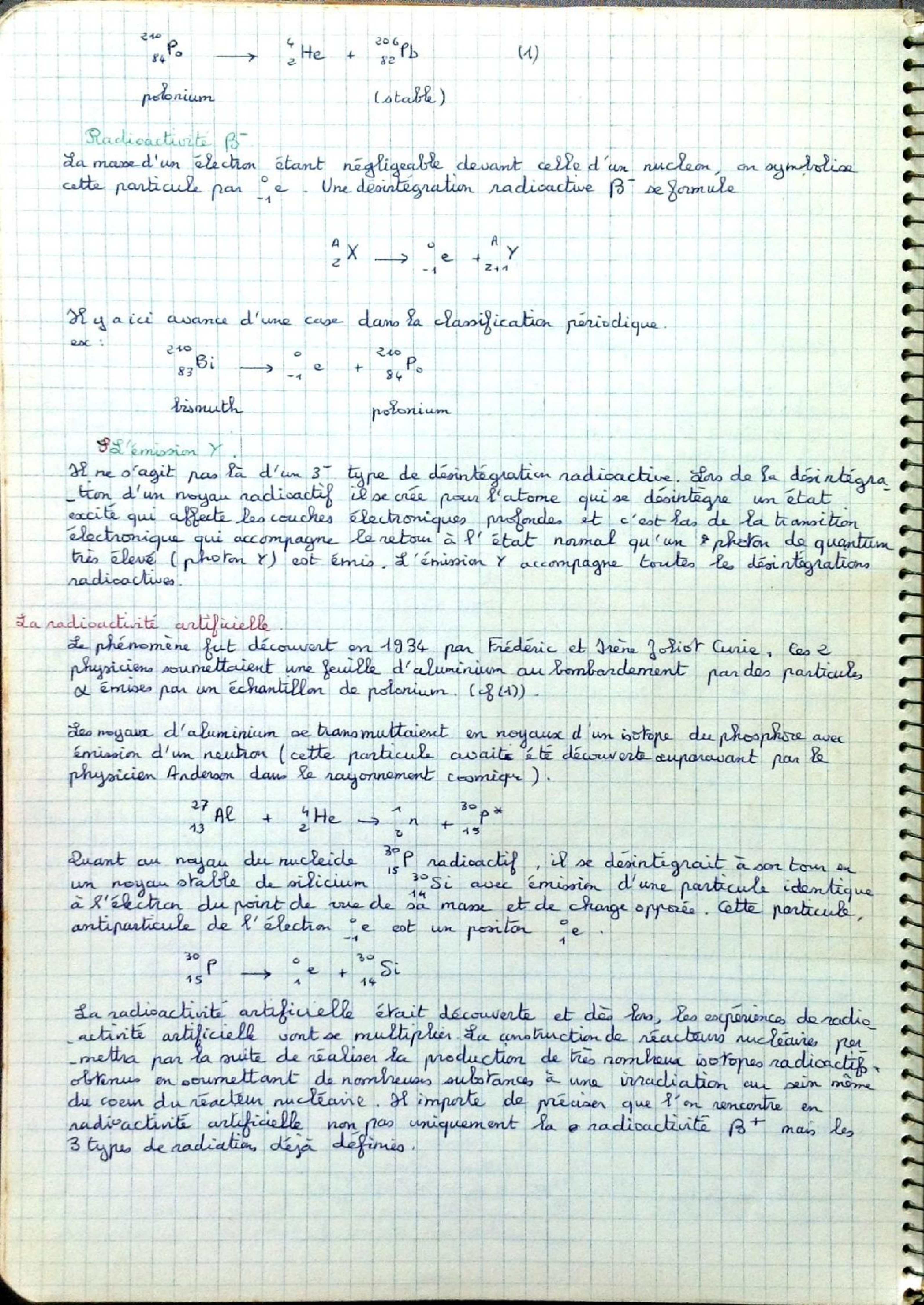
$$^A_ZX \longrightarrow {}^4_2He + {}^{A-4}_{Z-2}Y$$

Cette désintégration se traduit par un recul de 2 cases dans la classification périodique.

exemples : le radium

$$^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^4_2He + {}^{222}_{86}Rn$$

radium   radon



$$^{210}_{84}Po \longrightarrow \ ^{4}_{2}He + \ ^{206}_{82}Pb \qquad (1)$$

polonium (stable)

Radioactivité β^-

La masse d'un électron étant négligeable devant celle d'un nucleon, on symbolise cette particule par $^{0}_{-1}e$. Une désintégration radioactive β^- se formule

$$^{A}_{Z}X \longrightarrow \ ^{0}_{-1}e + \ ^{A}_{Z+1}Y$$

Il y a ici avance d'une case dans la classification périodique.

ex :

$$^{210}_{83}Bi \longrightarrow \ ^{0}_{-1}e + \ ^{210}_{84}Po$$

bismuth polonium

L'émission γ.

Il ne s'agit pas là d'un 3ᵉ type de désintégration radioactive. Lors de la désintégra_tion d'un noyau radioactif il se crée pour l'atome qui se désintègre un état excité qui affecte les couches électroniques profondes et c'est lors de la transition électronique qui accompagne le retour à l'état normal qu'un photon de quantum très élevé (photon γ) est émis. L'émission γ accompagne toutes les désintégrations radioactives.

La radioactivité artificielle.

Le phénomène fut découvert en 1934 par Frédéric et Irène Joliot Curie. Ces 2 physiciens soumettaient une feuille d'aluminium au bombardement par des particules α émises par un échantillon de polonium. (cf (1)).

Les noyaux d'aluminium se transmuttaient en noyaux d'un isotope du phosphore avec émission d'un neutron (cette particule avait été découverte auparavant par le physicien Anderson dans le rayonnement cosmique).

$$^{27}_{13}Al + \ ^{4}_{2}He \rightarrow \ ^{1}_{0}n + \ ^{30}_{15}P^*$$

Quant au noyau du nucleide $^{30}_{15}P$ radioactif, il se désintégrait à son tour en un noyau stable de silicium $^{30}_{14}Si$ avec émission d'une particule identique à l'électron du point de vue de sa masse et de charge opposée. Cette particule, antiparticule de l'électron $^{0}_{-1}e$ est un positon $^{0}_{1}e$.

$$^{30}_{15}P \longrightarrow \ ^{0}_{1}e + \ ^{30}_{14}Si$$

La radioactivité artificielle était découverte et dès lors, les expériences de radio_activité artificielle vont se multiplier. La construction de réacteurs nucléaires per_mettra par la suite de réaliser la production de très nombreux isotopes radioactifs, obtenus en soumettant de nombreuses substances à une irradiation au sein même du coeur du réacteur nucléaire. Il importe de préciser que l'on rencontre en radioactivité artificielle non pas uniquement la radioactivité β^+ mais les 3 types de radiation déjà définies.

Loi générale des désintégrations radioactives

Notion de période "radioactive" (ou de demi-durée de vie d'un radio-élément)

Considérons un échantillon radioactif qui contient à une date que nous prendrons comme date 0 un nombre N_0 d'atomes d'un élément radioactif. Le nombre d'atomes initialement présents va décroître avec la date du fait des désintégrations successives. Désignons par N le nombre d'atomes de ce radioélément encore présents à la date t. Le nombre d'atomes qui vont se désintégrer entre les dates t et t + dt est proportionnel d'une part à N et d'autre part proportionnel à l'intervalle de temps dt considéré. On peut l'écrire sous la forme $\lambda N dt$ où λ est une constante qui dépend du radio-élément. Autrement dit, le nombre d'atomes de ce radioélément présents dans cet échantillon a varié entre les dates t et t + dt de :

$$dN = -\lambda N dt$$

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Puis, par intégration des 2 membres : $\quad \text{Log } N = -\lambda t + Cte$

La valeur de la constante s'obtient en écrivant qu'à la date 0, $N = N_0$.

Donc $\quad \text{Log } N_0 = Cte$

$$\text{Log} \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

$$(1) \qquad N = N_0 \, e^{-\lambda t}$$

En conclusion, le nombre d'atomes d'un radioélément présents dans un échantillon radioactif décroît exponentiellement en fct de la date. On appelle période radioactive d'un radio élément ou demi-durée de vie l'intervalle de temps T au cours duquel le nombre d'atomes d'un radioélément présent initialement dans un échantillon radioactif a diminué de moitié.

Autrement dit, si dans la relation (1) on fait $t = T$, il vient $N = \frac{N_0}{2}$

Donc $\quad -\text{Log } 2 = -\lambda T$

$$T = \frac{\text{Log } 2}{\lambda} \simeq \frac{0{,}69}{\lambda}$$

T est extrêmement variable d'un radioélément à un autre.

Le tracé de la courbe qui traduit une loi de décroissance radioactive est immédiat. Cette courbe est un arc d'exponentielle.

N

N_0

T $\quad$ 2T $\quad$ 3T $\quad$ 4T $\quad$ t

Les résultats

Pour des vitesses faibles inférieures à $1\ m.s^{-1}$ (soit $3,6\ km.h^{-1}$), la résistance de l'air est pratiquement réduite à la résistance de frottement. Elle est alors proportionnelle à la vitesse.
Pour des vitesses subsoniques (nombre de Mach $< 0,8$). Le nombre de Mach est le rapport $\frac{v}{V}$ de la vitesse d'un mobile à la vitesse du son. Alors, la résistance de l'air est ~~inférieure~~ proportionnelle au carré de la vitesse.
Enfin, pour les vitesses supersoniques, (Mach $> 1,2$), il n'y a plus proportionalité.

vitesses faibles	$v < 1\ m.s^{-1}$	
vitesses subsoniques	Mach $< 0,8$	
vitesses transsoniques	$0,8 <$ Mach $< 1,2$	} domaine mal exploré.
vitesses supersoniques	Mach $> 1,2$	

Domaine subsonique

La résistance de l'air est proportionnelle :
- au carré de la vitesse relative v.
- à la surface S du maître couple.
- à la masse volumique a de l'air.
- à un coefficient C caractéristique de la forme du mobile.

$$\boxed{R = C a S v^2}$$

Il est commode, quelquefois, de poser $C a_0 = K$.

$$R = K S v^2$$

La vitesse limite de déplacement dans l'air.

Soit un mobile auquel est soumis :
- la force de traction $\vec{F} = Cte$
- la résistance de l'air $\vec{R} = KSv^2$

Le principe fondamental s'écrit, à la date t :

$$\vec{F} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$$

$$F - KSv^2 = m\frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad KS\left(\frac{F}{KS} - v^2\right) = m\frac{dv}{dt}$$

~~Posons $u = F - KSv^2$~~ Séparons les variables :

~~$du = -2KS\,v\,dv$~~

on obtient :
$$KS\,dt = \frac{m\,dv}{\frac{F}{KS} - v^2}$$

$$KS\,dt = \frac{mKS}{F} \cdot \frac{dv}{1 - \left(\sqrt{\frac{KS}{F}}\,v\right)^2} \qquad (1)$$

Posons $u = v\sqrt{\frac{KS}{F}}$, donc $dv = \sqrt{\frac{F}{KS}}\,du$

(1) devient :
$$KS\,dt = \frac{mKS}{F} \cdot \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{KS}} \cdot \frac{du}{1 - u^2}$$

$$KS\,dt = m \frac{\sqrt{KS}}{\sqrt{F}} \frac{du}{1-u^2}$$

$$\sqrt{KSF}\,dt = m \frac{du}{1-u^2}$$

Intégrons cette équation :

$$\sqrt{KS}\sqrt{F}\,t = m \operatorname{Arg\,th} u + Cte$$

pour $t = 0$, $v = 0$ donc $u = 0$. $\operatorname{Arg\,th} 0 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+0}{1-0} \right| = 0$. Donc $Cte = 0$.

$$\sqrt{KS}\sqrt{F}\,t = m \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right|$$

$$\frac{2}{m}\sqrt{KSF}\,t = \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right|$$

$$\left| \frac{1+u}{1-u} \right| = e^{\frac{2}{m}\sqrt{KSF}\,t}$$

si $1-u > 0 \mapsto u < 1 \mapsto v < \sqrt{\frac{F}{KS}}$ (début du mot) - Posons $\beta = \frac{\sqrt{KSF}}{m} t$

alors $1 + u = e^{2\beta}(1-u)$

$$u = \frac{e^{2\beta} - 1}{e^{2\beta} + 1} \mapsto u = \operatorname{th} \beta$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{KS}} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{KSF}}{m} t \right)$$

nous voyons que, quand $t \to +\infty$, $\beta \to +\infty$ et $\operatorname{th}\beta = \frac{e^{2\beta}-1}{e^{2\beta}+1} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2\beta}}}{1 + \frac{1}{e^{2\beta}}} \to 1$.

Donc $v \to \sqrt{\frac{F}{KS}}$ et $v < \sqrt{\frac{F}{KS}}$.

Nous n'aurons donc pas à envisager le cas où $v > \sqrt{\frac{F}{KS}}$, cas qui n'est jamais réalisé.

Donc :

$$v = \sqrt{\frac{F}{KS}} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{KSF}}{m} t \right)$$

La courbe donnant $v = f(t)$ a l'allure indiquée ci-dessous :

v
dans le vide
$v = gt$
dans l'air
O
t

Ainsi, nous obtenons la valeur de la vitesse limite :

$$v_l \simeq \sqrt{\frac{F}{KS}}$$